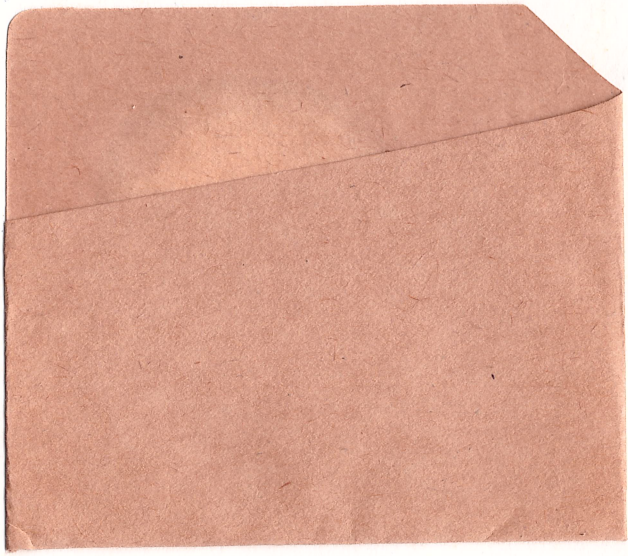
621.391
Р-82

Н. А. Рубичев

ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ РАДИОСИГНАЛОВ

Н. А. Рубичев ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ РАДИОСИГНАЛОВ



621.391
Р 82

Н. А. Рубичев

ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ РАДИОСИГНАЛОВ

071122

621.391

Москва «Советское радио» 1978

ПЕРЕВІРЕНО

ББК32.842
Р 82

УДК 621.391.83

Редакция радиотехнической литературы

Рубичев Н. А.

Р 82 Оценка и измерение искажений радиосигналов. — М.: Советское радио, 1978. — 168 с., ил.

Цена 45 к.

Излагается единый подход к измерению искажений непрерывных сигналов в радиотехнических системах. Приводятся структурные схемы измерения суммарных искажений, способы расчета отдельных видов искажений. Формулируются требования к тестовым сигналам.

Книга предназначена для широкого круга радиоспециалистов, разрабатывающих и исследующих характеристики систем связи, приемно-передающих и усилительных устройств, а также для специалистов по измерительной технике.

Р $\frac{30405\text{-}031}{046(01)\text{-}78}$ 27-78

ББК32.842
6Ф2.08

© Издательство «Советское радио», 1978 г.

Предисловие

Исследованием, измерением и нормированием искажений при передаче и преобразовании сигнала в той или иной степени занимаются специалисты всех областей радиотехники и смежных с нею дисциплин. Прежде всего это касается приемно-передающей и усилительной техники, связи, телевидения и электроакустики. В последние годы в связи с быстрым развитием информационно-измерительных систем различные сигналы все чаще становятся объектом измерений. Поэтому степень искажений сигнала в процессе измерений начинает интересовать специалистов по метрологии и измерительной технике, работающих в столь далеких друг от друга областях, как, например, в области контроля радиоэлектронных комплексов, медицинской техники и диагностики неисправностей механизмов и машин. Это вполне естественно, поскольку во всех случаях носителем информации на стадии ее обработки, как правило, является электрический сигнал, а методы исследования и преобразования сигналов в принципе одинаковы, хотя частотные диапазоны этих сигналов могут быть существенно различными.

В предлагаемой вниманию читателей книге исследуется метод оценки искажений сигнала, который в отличие от большинства традиционных методов позволяет с единых позиций подходить к расчету и измерению искажений различной физической природы. Получаемые при этом величины более полно характеризуют степень искажений реальных сигналов, для работы с которыми предназначена исследуемая система. Это, в свою очередь, позволяет более точно оценивать качество выполнения системой функций как на этапе ее проектирования, так и в процессе эксплуатации.

Значительная часть приводимых результатов публиковалась в периодических изданиях, некоторые результаты приводятся впервые.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность В. Я. Розенбергу, многолетнее сотрудничество с которым явилось одной из причин появления этой книги.

Автор признателен рецензентам книги заслуженному деятелю науки и техники РСФСР докт. техн. наук, профессору М. А. Сапожкову и канд. техн. наук М. У. Банку за ценные замечания, которые способствовали улучшению книги.

Автор заранее благодарит читателей за все замечания и пожелания, которые просит направлять в издательство «Советское радио» по адресу: Москва, Главпочтамт, а/я 693.

Введение

Физические причины возникновения искажений радиосигналов различны. Прежде всего это нелинейность и инерционность канала связи. Кроме того, искажения происходят из-за внутренних помех, аддитивных и мультипликативных, а также из-за других факторов. В соответствии с установившейся практикой искажения различной физической природы (нелинейные, линейные и шумовые) оценивают и измеряют различными методами и независимо друг от друга [2, 6, 34, 40, 42, 52, 55, 59, 74, 77]. Большинство этих методов можно разделить на две группы в зависимости от подхода к определению количественной характеристики искажений, называемой оценкой искажений.

К первой группе отнесем методы, основанные на использовании специальных тестовых сигналов, когда степень искажений определяют только для этих сигналов. Это методы измерения нелинейных искажений с помощью однотонального или двухтонального сигналов [2, 74, 84, 86, 104, 105] и метод полос шума [23], а также оценка линейных искажений по изменению формы тестового сигнала [18, 88] — косинус-квадратного импульса [34], пачки прямоугольных импульсов [90], гауссова импульса [8, 94], плавного перепада напряжения в виде интеграла ошибок [81]. Достоинством такого подхода является то, что оценка искажений, выражаемая числом, имеет четкий физический смысл и ее измерение, как правило, не представляет значительных трудностей. Однако при этом остается открытым вопрос о том, в какой степени получаемая оценка характеризует степень искажений реального сигнала, который будет действовать на входе исследуемой системы при эксплуа-

тации и в общем случае может значительно отличаться от тестового сигнала. При выборе тестового сигнала свойства реальных сигналов учитываются слабо.

Ко второй группе отнесем методы, при которых искажения оценивают, основываясь только на виде характеристик исследуемой системы, почти без каких-либо предположений о виде передаваемого сигнала. Сюда можно отнести оценку линейных искажений по неравномерности частотных характеристик и нелинейности фазовых [52, 85] или по переходным характеристикам исследуемой системы; оценку нелинейности по неравномерности первой производной амплитудной характеристики [34, 40, 95] или по максимальному отклонению этой характеристики от линейной [25, 98], а также большинство методов оценки шумовых искажений [41, 46, 76, 96, 97]. Получаемые при таком подходе числовые оценки в какой-то степени характеризуют искажающие свойства системы вообще, независимо от свойств передаваемого сигнала. Можно найти примеры, когда такой подход является единственно возможным, например, когда заранее неизвестен вид сигнала, для работы с которым предназначена исследуемая система. Нужно также отметить, что знание характеристик системы (частотных, переходных или амплитудных) в принципе позволяет при известных характеристиках передаваемого сигнала определить любую числовую характеристику выходного сигнала. В этом смысле знание этих характеристик дает исчерпывающую картину искажений, но метод получения меры искажений остается при этом неопределенным.

При измерении искажений методами второй группы оба подхода несколько сближаются, поскольку во всех случаях используются некоторые измерительные сигналы [89]. Например, оценить линейные искажения по переходным характеристикам можно с помощью периодической последовательности прямоугольных импульсов, т. е. с помощью тестового сигнала. Так же нелинейные искажения могут быть измерены с помощью пилообразного тестового сигнала. Однако в этом случае, в отличие от методов первой группы, форма тестового сигнала вытекает из определения оценки искажений и в общем случае не является единственной. Например, неравномерность частотной характеристики можно измерять с помощью синусоидального сигнала переменной частоты и шумового сигнала с равномерным спектром.

Упомянутые методы достаточно хорошо исследованы как теоретически, так и практически. В меньшей степени исследованы методы оценки искажений реальных сигналов. Вероятно, первой попыткой предложить такой метод является разработанный в 1937 г. А. А. Харкевичем способ оценки линейных искажений по среднеквадратичному критерию [79]. В этой работе рассмотрен ряд примеров детерминированных сигналов в предположении, что исследуемая система не вносит задержки в передаваемый сигнал и ее эквивалентный коэффициент передачи независимо от вида передаваемого сигнала равен коэффициенту передачи на нулевой частоте.

Дальнейшее развитие этот метод получил в работах Г. А. Левина и Б. Р. Левина [37, 38], в которых также рассмотрен случай линейного преобразования детерминированных сигналов, но эквивалентный коэффициент передачи и эквивалентное время запаздывания определяются таким образом, чтобы сигнал на выходе реальной системы и сигнал на выходе идеальной, неискажающей системы отличались наименьшим образом по среднеквадратичному критерию. Это минимально возможное значение критерия различия трактуется как мера искажения. Примеры применения такого подхода к оценке линейных искажений случайных сигналов приведены в работах [1, 82, 91 102].

Этому методу оценки линейных искажений аналогичен метод статистической линеаризации нелинейных безынерционных элементов систем автоматического регулирования, предложенный И. Е. Казаковым [26]. Минимально возможное значение квадрата разности выходных сигналов линейного и нелинейного элементов можно было бы использовать для оценки нелинейных искажений реальных сигналов. Однако автору неизвестны работы, в которых исследовался бы такой подход к анализу нелинейных искажений.

Из известных автору методов измерения нелинейных искажений только метод, предложенный В. М. Вольфом [9], применим для измерения искажений реальных сигналов. (Перечень работ, содержащих теоретическое обоснование этого метода и способов его аппаратурной реализации, можно найти в [59, 74]). Этот метод позволяет измерить спектральную плотность и, следовательно, мощность продуктов нелинейных искажений. Однако при измерении этим методом в передаваемый сигнал вносятся линейные искажения, которые могут

оказаться недопустимыми при эксплуатации [9, 99]. Этот метод наиболее удобен для исследования многоканальных систем связи [6].

Конечный результат действия различных искажающих факторов, несмотря на их различную физическую природу, одинаков: сигнал на выходе системы отличается по форме от сигнала на ее входе. Поэтому было бы целесообразно оценивать различные искажения с единых позиций. Однако все упомянутые методы оценки искажений применимы к искажениям только одного вида. Причиной этого, по мнению автора, является то, что определяющим для этих методов является способ измерения, в большинстве случаев связанный с тем или иным тестовым сигналом, подверженным в основном искажениям только одного вида, а оценка (мера) искажений зависит от способа измерения.

Исключение составляет предложенный М. А. Сапожковым корреляционный метод [70], который применим к оценке искажений всех видов независимо от их физической природы. Мерой искажений в этом случае служит отличие максимума модуля коэффициента корреляции между входным и выходным сигналами от единицы. К этому методу многократно возвращались [24, 47, 74, 93], однако он не получил должного развития, в частности совершенно не исследовались вопросы диагностики искажений.

Другим методом, применимым к оценке искажений реальных сигналов, является метод, основанный на сравнении автокорреляционных функций сигналов на входе и выходе исследуемой системы [31, 51, 71, 73]. Однако практически этот метод разработан слабо. Кроме того, он в принципе не применим к анализу фазовых искажений.

В [19] искажения сигнала оцениваются величиной искажений диаграммы неопределенности.

Большое разнообразие не связанных друг с другом методов оценки различных искажений ставит задачу исследования этих методов, их возможностей и ограничений. Такое исследование вполне возможно при едином подходе к оценке различных искажений.

В связи с изложенным представляются полезной разработка единого метода оценки искажений, применимого к искажениям любой физической природы. К этому методу, по мнению автора, целесообразно предъявить следующие требования.

1. Должна быть получена оценка искажений реального сигнала, для работы с которым предназначена исследуемая система, что в принципе позволит контролировать искажения в процессе эксплуатации.

Поскольку передаваемый сигнал, как правило, является случайным или почти случайным, метод должен быть статистическим.

2. Оценка искажений должна даваться в виде одного числа. Это позволит сравнивать по степени искажений различные системы одинакового назначения, выбирать оптимальные значения отдельных параметров системы, оперативно контролировать искажения, использовать результаты контроля для автоматической подстройки системы с целью уменьшения искажений.

Оценка искажений с помощью одного числа оправдала себя в существующих методах оценки нелинейных искажений. В то же время, если искажающие свойства системы характеризуются группой параметров (например, при оценке линейных искажений по переходным характеристикам), результаты измерений оказываются трудносопоставимыми, имеется некоторый произвол в нормировании различных показателей и ряд других трудностей.

3. Желательно, чтобы получаемая оценка искажений имела четкий физический смысл.

4. При необходимости после получения оценки искажений должна иметься возможность дополнительного исследования продуктов искажений, аналитического или экспериментального (спектрально-корреляционный анализ, статистический и т. д.).

5. Для выявления причин искажений должна быть предусмотрена возможность выбора тестового сигнала, подверженного в основном одному виду искажений. При этом степень искажений тестового сигнала должна быть адекватна степени искажений реального сигнала в исследуемой системе.

Тенденция приближения тестового сигнала к реальному наглядно проявляется в усложнении тестовых сигналов для измерения нелинейных искажений — от одночастотных сигналов переходят к двухтональным и шумовым. При этом руководствуются в основном эвристическими соображениями, тогда как более обоснованным является формулирование требований к тестовому сигналу на основе сравнения характеристик, обусловливающих степень искажений.

6. Аппаратура для измерения искажений по единому методу должна быть достаточно простой; желательно, чтобы она состояла в основном из серийно выпускаемых приборов.

Необходимо отметить, что в полном объеме этим требованиям не удовлетворяет ни один из традиционных методов.

Исследовать искажения сигнала необходимо в двух тесно примыкающих друг к другу направлениях.

Первое направление — методологическое, включающее в себя определение понятий искаженной и неискаженной передачи сигналов и дающее рекомендации относительно выбора числовых величин, характеризующих степень искажений. Сюда же относится задача расчета этих величин при известном виде характеристик исследуемой системы в процессе ее проектирования.

Основные понятия «неискажающая система» и «искажения сигнала», несмотря на кажущуюся очевидность, не являются простыми. Прежде всего необходимо отметить, что эти понятия не во всех случаях несут одинаковую смысловую нагрузку. Например, в телевидении и при некоторых видах измерений неискажающая система должна сохранять форму сигнала, а в монофонических электроакустических системах и при некоторых других видах измерений достаточно сохранять форму амплитудного или энергетического спектра. Поэтому при корректном введении величин, характеризующих искажения, прежде всего необходимо дать четкое определение этих понятий.

Второе направление — измерительное, связанное с экспериментальным определением величины, характеризующей искажения. Очевидно, что алгоритм измерения должен вытекать из определения оценки искажений. Однако, как уже отмечалось, в традиционных методах это не всегда так.

В данной книге делается попытка предложить единый метод оценки искажений [56—58], удовлетворяющий сформулированным требованиям, и он исследуется в упомянутых направлениях.

Предлагаемый метод оценки искажений реального сигнала основан на сравнении по некоторому критерию выходных сигналов исследуемой и неискажающей систем. Исходными при этом явились упомянутые работы А. А. Харкевича, Г. А. Левина и Б. Р. Левина, И. Е. Казакова и М. А. Сапожкова. Этот метод создавался

параллельно с общей теорией точности измерительных систем, развиваемой В. Я. Розенбергом [53, 54], и является одним из примеров приложения идей этой теории к практическим задачам.

Изложение сопровождается простейшими примерами расчета, цель которых проиллюстрировать, по возможности с наименее громоздкими выкладками, применимость излагаемых идей к решению конкретных задач. Этой же цели служит описание некоторых экспериментов по измерению искажений.

Основным математическим аппаратом книги является теория случайных процессов. Предполагается, что читатель знаком с ней, например, в объеме книг Б. Р. Левина [36] или В. И. Тихонова [78].

Глава 1

ОБЩИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИСКАЖЕНИЙ ПЕРЕДАВАЕМОГО СИГНАЛА

1.1. Разделение преобразованного сигнала на полезный сигнал и продукты искажений

Пусть в результате преобразования входного воздействия $x(t)$ исследуемой системой на ее выходе наблюдается реакция

$$y(t) = \mathcal{A}\{x(t)\}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{A}$ — некоторый оператор, определяемый внутренней структурой системы. Например, если исследуемая система нелинейна и безынерционна, то $y(t) = f[x(t)]$, где $f(\cdot)$ — нелинейная амплитудная характеристика системы.

Для стационарной линейной системы

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau,$$

где h — импульсная реакция системы.

Если на передаваемый сигнал накладываются аддитивный и мультипликативный шум, то

$$y(t) = c(t)\, x(t) + z(t),$$

где $c(t)$, $z(t)$ — случайные процессы.

Для краткости функции $x(t)$ и $y(t)$ будем называть соответственно входным и выходным сигналами. В приведенных примерах это так и есть. Однако в общем случае $x(t)$ и $y(t)$ не обязательно будут совпадать с этими сигналами. Например, при исследовании искажений в радиоприемнике под входным воздействием $x(t)$ следует понимать огибающую входного сигнала (при приеме амплитудно-модулированного сигнала) или отклонение мгновенной частоты от частоты несущей (при приеме частотно-модулированного сигнала), а под выходной реакцией $y(t)$ — электрический сигнал на выходе

УНЧ или акустический сигнал на выходе громкоговорителя. При исследовании модуляторов входным воздействием является модулирующий сигнал, а $y(t)$ — огибающей или отклонением мгновенной частоты выходного сигнала. При исследовании смесителей $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой огибающие входного и выходного сигналов.

Говоря о разделении преобразованного сигнала $y(t)$ на полезный сигнал $y_{\text{п}}(t)$ и продукты искажений $\xi(t)$, прежде всего необходимо определить понятие неискажающей, идеальной системы, для которой $y(t) \equiv y_{\text{п}}(t)$, т. е. весь выходной сигнал является полезным, а продукты искажений отсутствуют. Как уже отмечалось во введении, такое определение не может быть универсальным, одинаковым для всех систем. Во многих случаях необходимо считать, что искажения отсутствуют только в том случае, если в процессе преобразования сигнала изменяются его масштаб (линейное усиление или ослабление), задержка и постоянная составляющая, т. е.

$$\widetilde{y}(t) = kx(t-\tau) + a. \qquad (1.2)$$

Такое определение идеальной системы необходимо применять во всех случаях, когда интерес представляет непосредственно форма передаваемого сигнала, как, например, в телевидении, импульсной технике, при передаче измерительной информации. На таком представлении об идеальной системе основаны существующие методы оценки нелинейных искажений по неравномерности первой производной амплитудной характеристики системы и методы оценки линейных искажений по переходным характеристикам или фазовым.

Для краткости исследуемые системы, для которых идеальное преобразование определяется соотношением (1.2), будем условно называть видеотрактами.

Для некоторых систем (например, в монофонической электроакустике) соотношение (1.2) является чрезмерно жестким, поскольку из-за особенностей восприятия звука человеком важно сохранение формы не самого сигнала, а его амплитудного или энергетического спектра (при отсутствии сдвига по обеим осям координат в частотной области). Это обстоятельство учитывается в существующих методах оценки искажений в электроакустических трактах. Например, при измерении нелинейных искажений с помощью двухтонального сигнала в их

оценке учитывают только амплитуды гармоник с комбинационными частотами, фазовые же сдвиги между основными тонами на выходе системы не учитывают. Точно так же линейные искажения в этих случаях оценивают только по неравномерности частотной характеристики, фазовые характеристики при этом не рассматривают, предполагая, что они не влияют на качество передачи.

В этом случае неискажающей можно считать линейную систему с равномерной частотной характеристикой и произвольной фазовой

$$\tilde{y}(t)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{j[\omega t+\varphi(\omega)]}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-j\omega t}dt\right\}d\omega+a. \quad (1.3)$$

Если идеальная система задана (1.3), то она в общем случае будет иметь бесконечную память и соответствующая этой системе импульсная реакция будет физически не реализуемой. При аналитических выкладках физическая нереализуемость идеальной системы не играет роли. Тем не менее необходимо учитывать, что если сигнал $x(t)$ существует на конечном интервале времени $[t_1;\ t_2]$, то выходной сигнал реальной системы может существовать на полубесконечном интервале $[t_1;\ \infty)$, а выходной сигнал идеальной системы — на всей бесконечной оси времени.

В дальнейшем системы, для которых идеальное преобразование определено (1.3), будем условно называть электроакустическими, хотя такое определение возможно и в некоторых других случаях (например, при анализе искажений сигналов во входных цепях коррелометров и анализаторов спектра). Для систем же стереофонического вещания важны не только амплитудные, но и фазовые соотношения, поэтому для них неискажающее преобразование должно определяться в соответствии с (1.2).

Поскольку возможны и другие определения идеальных систем *), будем в общем случае считать, что неискажающие системы преобразуют входной сигнал в со-

*) Например, при исследовании систем записи и воспроизведения сигналов идеальным можно считать преобразование $\tilde{y}(t)=kx(\gamma t-\tau)+a$, где k, γ, τ и a — константы, т. е. в этом случае может допускаться некоторое изменение временно́го масштаба и соответственно масштаба по оси частот в частотной области.

ответствии с некоторым оператором $\tilde{\mathcal{A}}$, зависящим от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t; \alpha_1; \ldots; \alpha_m) = \tilde{\mathcal{A}}\{x(t); \alpha_1; \ldots; \alpha_m\}. \qquad (1.4)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением операторов $\tilde{\mathcal{A}}$, задаваемых (1.2) или (1.3). В первом случае параметрами идеального преобразования являются k, τ и a, во втором — k, a и $\varphi(\omega)$.

При определении идеальной системы в соответствии с (1.2) или (1.3) предполагается, что требования к точности значения коэффициента передачи существенно ниже, чем к точности сохранения формы передаваемого сигнала или формы его спектра. Например, предполагается, что при проектировании или построении системы отличие коэффициента передачи от номинального на 10% практически не влияет на ее качество, в то время как искажения в 10% могут оказаться существенными или даже недопустимыми. В ряде случаев (например, в измерительных устройствах), требования к точности коэффициента передачи и соответственно к точности времени задержки могут быть одного порядка с требованиями к точности сохранения формы. При этом соответствующие параметры в идеальных системах должны быть оговорены и зафиксированы.

Припишем реальной системе, описываемой оператором $\mathcal{A}$, такие параметры оператора идеальной системы $\alpha_{i0}(i=\overline{1, m})$, при которых сигналы $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ при одном и том же входном воздействии отличаются наименьшим образом. Критерием отличия может служить любой неотрицательный функционал $F\{y(t); \tilde{y}(t)\}$, обращающийся в нуль при $y(t) \equiv \tilde{y}(t)$ *). (Подробнее вопрос о выборе и представлении критериев отличия сигналов будет рассмотрен в § 1.2.)

---

*) Строго говоря, большинство применяемых критериев обращаются в нуль, если $y(t) = \tilde{y}(t)$ почти всюду. Исключение составляет критерий равномерного приближения. Для реальных сигналов, являющихся непрерывными и ограниченными функциями времени, равенство функций почти всюду эквивалентно их тождественности. Однако это замечание может быть существенным, если значения F определяются не непосредственно сигналами $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, а некоторыми операторами от них (например, энергетическими спектрами, плотностями вероятности).

Таким образом, для определения α_{i0} имеем уравнение

$$F\{y(t);\ \tilde{y}(t; \alpha_1; \ldots; \alpha_m)\} = \min_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}. \qquad (1.5)$$

Это условие эквивалентно условию наилучшей аппроксимации функции $y(t)$ функцией $\tilde{y}(t; \alpha_1; \ldots; \alpha_m)$. Поэтому исследовать существование и единственность решения уравнения (1.5) можно методами теории аппроксимации [10].

Получив параметры идеальной системы, наиболее близкой к исследуемой, сигнал $y(t)$ можно разделить на полезный сигнал, которым является сигнал на выходе идеальной системы с параметрами α_{i0}, и продукты искажений:

$$\xi(t) = y(t) - \tilde{y}(t; \alpha_{10}; \ldots; \alpha_{m0}). \qquad (1.6)$$

1.2. Критерии различия сигналов

Оценка различия сигналов применительно к рассматриваемой задаче и другим аналогичным ей — одна из сторон оценки качества выполнения системой функций. Поэтому для краткости будем употреблять термины критерий различия сигналов и критерий качества системы в одинаковом смысле, хотя второй термин в общем случае более емкий.

Любая оценка качества имеет практический смысл только в тех случаях, когда на ее основе сравниваются различные системы одинакового назначения, оптимизируются значения отдельных параметров системы для получения наивысшего качества или проверяется, контролируется качество. Поэтому проблема выбора критерия тесно связана с теорией оптимальных систем. Несмотря на различные назначения этих систем, подход к оценке качества одинаков в различных областях техники: в автоматике [1, 30, 44], телевидении [33], связи и радиотехнике [12, 36, 43]. Этот подход сводится к следующему.

Пусть исследуемая система преобразует сигнал $x(t)$ в сигнал $y(t)$ в соответствии с некоторым оператором $\mathcal{A}$. Тогда различие выходных сигналов реальной системы $y(t) = \mathcal{A}\{x(t)\}$ и идеальной $\tilde{y}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\{x(t)\}$ (где $\tilde{\mathcal{A}}$ — некоторый желаемый оператор, определяемый назначением системы) для конкретного сигнала $x(t)$ оценивается средним по времени от некоторой функции потерь:

$$F\{x(t)\} = F\{y(t);\ \tilde{y}(t)\} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \rho[y(t);\ \tilde{y}(t)]\, dt, \qquad (1.7)$$

где $[t_1; t_2]$ — интервал времени, на котором хотя бы один из сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ отличен от нуля; в общем случае этот интервал отличается от интервала существования $x(t)$.

Если сигналы $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ имеют конечную энергию, то множитель $1/(t_2-t_1)$ можно опустить. Если же эти сигналы заданы на бесконечном или полубесконечном интервале времени и имеют конечную среднюю мощность, то F вычисляется предельным переходом при $t_1 \to -\infty$ и $t_2 \to \infty$.

Функция потерь ρ должна удовлетворять условиям: $\rho \geqslant 0$, $\rho = 0$ при $y = \tilde{y}$. Большинство применяемых функций потерь можно представить как функцию разности $\varepsilon(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$, т. е.

$$\rho(y; \tilde{y}) = \rho(y - \tilde{y}) = \rho(\varepsilon). \tag{1.8}$$

При этом $\rho(0) = 0$, $\rho(\varepsilon)$ не убывает при $\varepsilon > 0$ и не возрастает при $\varepsilon < 0$.

В табл. 1 приведен ряд функций потерь для некоторых часто применяемых критериев.

Таблица 1

Критерий	Физическая трактовка критерия	Функция потерь $\rho(\varepsilon)$
Среднеквадратичный	Энергия или средняя мощность ошибки	ε^2
Среднеквадратичный с весом	—	$q[x(t); t]\,\varepsilon^2$, $q \geqslant 0$
Среднемодульный	Постоянная составляющая результата двухполупериодного выпрямления ошибки	$\lvert\varepsilon\rvert$
Интервальный	Относительное время пребывания ошибки вне интервала $[n; m]$; для стационарных случайных процессов совпадает с вероятностью пребывания вне этого интервала	1, $\varepsilon < n$, 0, $n \leqslant \varepsilon \leqslant m$, 1, $\varepsilon > m$
Равномерного приближения	Пиковое значение результата двухполупериодного выпрямления ошибки	$\max \lvert\varepsilon\rvert$

Аргументами функций потерь могут быть не сами сигналы, а некоторые определяемые ими функции, например спектры, автокорреляционные функции, плотности вероятности. В этом случае

$$F\{x(t)\} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \rho\left[Q_y(r);\ Q_{\tilde{y}}(r)\right] dr, \tag{1.9}$$

где $Q_y(r)$, $Q_{\tilde{y}}(r)$ — сравниваемые характеристики сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$; $[r_1; r_2]$ — интервал существования этих характеристик. Исходя из физического смысла характеристики $Q(r)$, которая в большинстве случаев оказывается интегрируемой функцией, нормирующий множитель $1/(r_2-r_1)$ в (1.9) можно опустить.

В § 2.3 будет показано, что сравнение по среднеквадратичному критерию сигналов на выходе реальной и идеальной системы, определенной в соответствии с (1.3), в ряде случаев можно заменить сравнением амплитудных или энергетических спектров сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ на всей оси частот, за исключением точки $\omega=0$. Другими примерами могут служить оценки нелинейных искажений по степени различия одномерных распределений [7] и искажений по степени различия автокорреляционных функций [31, 71, 73].

Если необходимо оценить качество системы для множества входных сигналов X (что в большинстве случаев и представляет практический интерес), то чаще всего используют математическое ожидание $F\{x(t)\}$ на этом множестве

$$F_X = M\,[F\{x\,(t)\}]. \tag{1.10}$$

Далее в основном будем предполагать, что передаваемый сигнал является реализацией стационарного случайного процесса. Тогда для определения критерия различия достаточно провести одно из усреднений по формуле (1.7) или (1.10) и

$$F_X = F\{x\,(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\,(\varepsilon)\; w_\varepsilon\,(\varepsilon)\; d\varepsilon, \tag{1.11}$$

где w_ε — плотность вероятности ошибки $\varepsilon\,(t)$.

При определении критерия качества на множество реализаций нестационарного эргодического процесса [80] также возможно только одно усреднение — усреднение по времени. В этом случае можно применить формулу (1.11), если под $w_\varepsilon\,(\varepsilon)$ понимать результат усреднения одномерной плотности вероятности $w_\varepsilon\,(\varepsilon;\ t)$ по времени:

$$w_\varepsilon\,(\varepsilon) = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} w_\varepsilon\,(\varepsilon;\ t)\,dt.$$

При задании w_ε таким образом формула (1.11) для F_X справедлива для произвольных случайных процессов, но оказывается не применимой для вычисления $F\{x(t)\}$.

Другим методом оценки различия сигналов на некотором множестве входных сигналов является задание F_X в виде

$$F_X = \max_{x\,(t)\in X} F\{x\,(t)\}, \tag{1.12}$$

т. е. среди множества сигналов X находится такой сигнал $x(t)$, при котором критерий различия $y(t)$ от $\tilde{y}(t)$ достигает максимума. В этом случае для всех $x(t)\in X$ различие выходных сигналов реальной и идеальной систем $F\{x(t)\}$ не будет превышать F_X. Для ста-

071122

ционарных случайных процессов задание F_x (1.10) и (1.12) является эквивалентным, поскольку для них средние по времени совпадают для всех реализаций.

Наиболее часто применяют среднеквадратичный критерий. Это обусловлено двумя причинами: во-первых, этот критерий, представляя собою энергию или среднюю мощность ошибки, имеет четкую физическую интерпретацию; во-вторых, вычисления, связанные с его применением, оказываются значительно проще и выполнимы для более широкого класса задач, чем при других критериях. Например, при оценке линейных искажений произвольного случайного процесса $x(t)$ необходимо знать выражение для плотности вероятности ошибки $\varepsilon(t)$, которая в этом случае может трактоваться как результат линейного преобразования процесса $x(t)$. Задача определения плотности вероятности результата линейного преобразования случайного процесса пока не получила исчерпывающего решения. Однако если критерий среднеквадратичный, то его значение можно определить, зная только автокорреляционную функцию процесса $x(t)$. Сказанное, однако, не означает, что среднеквадратичный критерий является универсальным. Например, если сигнал с выхода исследуемой системы поступает на пороговое устройство, то существу задачи в большей степени будет соответствовать оценка различия сигналов по вероятности пребывания ошибки вне некоторого интервала (интервальный критерий). Аналогичные примеры можно привести и для других критериев.

Критерий равномерного приближения (ориентируясь в некотором смысле на наихудший случай) можно использовать для оценки сверху значений других критериев. Действительно, если функция потерь имеет вид (1.8), то для всех критериев справедливо неравенство

$$F \leqslant \max [\rho(-F_{\text{рп}}); \rho(F_{\text{рп}})],$$

где $F_{\text{рп}}$ — критерий равномерного приближения.

Эта оценка является весьма завышенной. Например, для интервального критерия получаем тривиальный результат $F \leqslant 1$, если $F_{\text{рп}} > \min(|n|, m)$, в противном случае $F = 0$. Для среднеквадратичного критерия $F \leqslant F^2_{\text{рп}}$. Достоинством этой оценки, несмотря на ее завышенность, является то, что для ее определения необходимо минимальное количество информации об ошибке $\varepsilon(t)$, хотя объем вычислений для определения $F_{\text{рп}}$ может оказаться значительным. Однако для некоторого класса сигналов (например, для нормальных случайных процессов) $F_{\text{рп}} = \infty$ и приведенное неравенство оказывается неинформативным.

В общем случае критерий качества системы не может быть получен только теоретически на основе математических или логических рассуждений, его следует определять, исходя из назначения системы, анализа условий ее эксплуатации и т. д. Это обстоятельство подчеркивается во всех упомянутых работах, в которых обсуждается вопрос выбора критерия качества.

В процессе оптимизации системы, изменяя ее свойства, добиваются минимального значения критерия различия сигналов, в рассматриваемом случае минимума искажений сигнала. Вообще для различных критериев оптимальными будут различные системы. Однако для некоторого класса систем, сигналов и критериев система, оптимальная по одному из критериев этого класса, будет оптимальной и по всем другим критериям того же класса. Например, в [30]

показано, что необходимым и достаточным условием этого при функции потерь вида (1.8) является одновершинность и симметричность условного распределения $w[x/y)$. Аналогичный результат в предположении о высокой точности системы приведен в [12].

Некоторые возможности замены критериев имеются при контроле годности исследуемой системы для нормального функционирования. Действительно, пусть качество системы оценивается по критерию F_1 и она считается годной, если $F_1 \leqslant F_{1\text{доп}}$. Тогда проверку системы по критерию F_1 можно заменить проверкой по критерию F_2, если можно найти такое $F_{2\text{доп}}$, что для всех сигналов $x(t) \in X$ из условия $F_2 \leqslant F_{2\text{доп}}$ будет вытекать условие $F_1 \leqslant F_{1\text{доп}}$. Например, если F_1 — интервальный критерий, а F_2 — среднеквадратичный, то из неравенства Чебышева [36] имеем $F_1 \leqslant F_2[\min(|n|; m)]^{-2}$. Тогда при $F_{2\text{доп}} = F_{1\text{доп}}[\min(|n|; m)]^2$ из неравенства $F_2 \leqslant F_{2\text{доп}}$ будет следовать неравенство $F_1 \leqslant F_{1\text{доп}}$.

В соответствии со сказанным о критерии равномерного приближения контроль по любому критерию вида (1.8) можно свести к контролю по критерию равномерного приближения, если только на множестве X он не обращается в бесконечность.

Потерями при такой замене критериев будет то, что часть годных систем, т. е. тех, для которых $F_1 \leqslant F_{1\text{доп}}$, будут браковаться, поскольку для них может оказаться $F_2 > F_{2\text{доп}}$. Таким образом, замена критериев приводит к ужесточению требований при контроле.

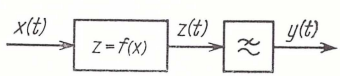


Рис. 1.1.

Утверждение о том, что критерий качества системы в целом не может быть получен на основе только теоретических рассуждений, не отрицает необходимость определения критерия качества отдельных устройств, входящих в эту систему, если задан ее критерий качества. Здесь уместно привести слова академика А. А. Харкевича [79]: «Следует прежде всего точно определить функцию аппарата и установить, во-первых, предъявляемые к нему требования, во-вторых, вытекающие из этих требований свойства аппарата и, в-третьих, критерий их оценки. Далее, выбирая тот или иной способ описания свойств аппарата, надлежит установить соответствие между этим способом описания и выбранным критерием и не упускать этого соответствия в течение всего последующего исследования». Поэтому задание критериев качества отдельных устройств без учета критерия качества системы в целом, независимо друг от друга и без учета структуры системы неправильно, так как не позволит решить конечной задачи — обеспечения требуемого качества системы при ее оптимизации. Проиллюстрируем это простейшим примером.

Пусть исследуемая система, предназначенная для передачи гармонического колебания, представляет каскадное соединение нелинейного элемента и фильтра нижних частот (ФНЧ) и ее качество характеризуется мощностью высших гармоник сигнала $y(t)$ (рис. 1.1). Тогда оценка качества нелинейного элемента по мощности всех высших гармоник сигнала $z(t)$ будет неправильной. Необходимо учитывать мощность только тех гармоник, которые находятся в полосе пропускания ФНЧ. Поэтому элемент с нелинейностью третьего порядка при равном или даже несколько большем коэффициенте гармоник будет лучше, чем элемент с нелинейностью второго порядка.

В общем случае, если система в целом характеризуется критерием F_0, а между исследуемым устройством и выходом системы

стоит оконечный каскад, характеризуемый оператором $\mathcal{A}_0$, то критерий качества этого устройства можно задать в виде $F=F_0\{\mathcal{A}_0[y(t)];\ \mathcal{A}_0[\tilde{y}(t)]\}$. Более подробно вопрос о выборе критерия качества устройства, входящего в систему, и о возможности замены одного критерия другим рассмотрен в [60].

1.3. Определение параметров исследуемой системы

Степень отличия исследуемой системы от идеальной, величину вносимых искажений, можно характеризовать минимально достижимым значением критерия различия сигналов $F_{\text{мин}}$, определяемым из условия (1.5). Однако в ряде случаев это может оказаться нецелесообразным. Так, например, если F является среднеквадратичным значением разности $y(t)-\tilde{y}(t)$, то степень искажений удобнее описывать отношением $F_{\text{мин}}$ к мощности всего или только полезного выходного сигнала или корнем квадратным из этого отношения, поскольку обычно интересуются относительным, а не абсолютным значением ошибки. Поэтому в общем случае искажения сигнала исследуемой системой будем характеризовать функционалом $\Phi\{y(t);\ \tilde{y}(t;\ \alpha_{10};\ \ldots;\ \alpha_{m0})\}$, который связан с $F_{\text{мин}}$ и может совпадать с ним.

Полученная таким образом оценка будет мерой суммарных искажений, обусловленных совместным действием всех искажающих факторов, приводящих к различию выходных сигналов реальной и идеальной систем. Идентификация искажений на линейные, нелинейные и шумовые и разложение суммарной оценки на составляющие представляет самостоятельную задачу, которой коснемся далее (§ 2.5, гл. 3—5).

При необходимости более детального исследования продуктов искажений это можно сделать, подвергнув спектральному или статистическому анализу процесс $\xi(t)$ (1.6). Отметим, что здесь обсуждаются искажения конкретного сигнала $x(t)$ или сигналов некоторого конкретного множества X. Говорить об искажениях системы в отрыве от свойств передаваемых сигналов представляется нецелесообразным.

Остановимся теперь на определении некоторых параметров системы (коэффициент передачи, время задержки, динамический диапазон и т. д.), которые прямо или косвенно связаны с определением искажений.

Если идеальная система задана в соответствии с (1.2) или (1.3), то величину k_0, которая обеспечивает

минимум F и является независимым от частоты коэффициентом передачи идеальной системы, наиболее близкой к исследуемой, целесообразно определить как эквивалентный коэффициент передачи исследуемой системы. Если идеальная система определена в соответствии с (1.3), величину τ_0 можно трактовать как эквивалентное время задержки, а величину a_0 для обоих определений идеальной системы можно рассматривать как дополнительное изменение постоянной составляющей из-за нелинейности исследуемой системы.

Очевидно, что параметры k_0, a_0 и τ_0 будут различными для разных входных сигналов. Это не является отличительной особенностью единого метода оценки искажений. Так, например, коэффициент передачи часто определяют как отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала к амплитуде синусоидального сигнала на входе. Тогда он оказывается зависящим от амплитуды и частоты входного сигнала и не является неизменной характеристикой системы.

Динамический диапазон системы обычно определяют следующим образом:

$$D=20\lg(X_{\text{макс}}/X_{\text{мин}}), \qquad (1.13)$$

где $X_{\text{макс}}$, $X_{\text{мин}}$ — максимальное и минимальное значения входного сигнала (пиковое, амплитудное, действующее и т. д.); $X_{\text{макс}}$ определяется из условия непревышения нелинейными искажениями допустимого значения, а $X_{\text{мин}}$ зависит от уровня собственного аддитивного шума.

Поскольку нелинейные и шумовые искажения оценивают различными методами, причем нелинейные искажения, как правило, определяют не по реальному, а по тестовому сигналу, обоснованно выбрать динамический диапазон сложно. При применении рассматриваемого метода эти искажения будут характеризоваться единообразно и неопределенность в расчете динамического диапазона может быть устранена. Следует отметить, что использование энергетических характеристик при определении динамического диапазона не является обязательным. В формулу (1.13) могут входить и некоторые статистические характеристики, отражающие информационную структуру сигнала.

Частотные свойства обычно характеризуются полосой пропускания, которая определяется таким образом, что-

бы неравномерность амплитудно-частотной характеристики или нелинейность фазовой не превышали допустимого значения. Это определение имеет ряд недостатков, поскольку оно совершенно не учитывает поведение характеристик вне полосы пропускания и слабо учитывает их поведение в пределах полосы. Кроме того, это определение, как и другие, с помощью которых пытаются устранить его недостатки [14, 83, 92], базируется на предположении, что спектр передаваемого сигнала финитен, т. е. точно равен нулю вне некоторого интервала частот, что невозможно для реальных сигналов.

Если оставить в силе предположение о финитности спектра передаваемого сигнала, то полосу пропускания линейной системы можно определить следующим образом. Пусть $X_{\omega_1\omega_2}$ — множество всех сигналов, спектр которых равен нулю вне интервала частот $[\omega_1; \omega_2]$ и удовлетворяет еще некоторым ограничениям, например равномерен в этом интервале. Введем функцию

$$\eta(\omega_1; \omega_2) = \max_{x(t)\in X_{\omega_1\omega_2}} \Phi\{x(t)\}$$

и зададим максимально допустимую величину искажений $\Phi_{\text{доп}}$ (аналогично заданию максимально допустимой неравномерности частотной характеристики). Тогда нижнюю ω_1 и верхнюю ω_2 границы полосы пропускания можно определить из условий

$$\eta(\omega_1; \omega_2) \leqslant \Phi_{\text{доп}}, \quad \omega_2 - \omega_1 = \max. \tag{1.14}$$

Другой характеристикой частотных свойств системы, не связанной с предположением о финитности спектра, может служить частотный динамический диапазон, определяемый следующим образом. Пусть форма энергетического спектра сигнала $x(t)$ $S(\omega) = S(\omega; \nu)$ зависит от некоторого параметра ν. Например, $S(\omega; \nu) = S(\omega\nu)$, где $S(\cdot)$ — некоторая заданная функция, или $S(\omega; \nu) = 1/[1 + d(\omega - \nu^2)]$. Тогда величина искажений Φ будет функцией ν. Из условия $\Phi(\nu) \leqslant \Phi_{\text{доп}}$ найдем максимально и минимально возможные значения ν, и под частотным динамическим диапазоном в зависимости от смысла параметра ν будем понимать величину

$$D'_f = \nu_{\text{макс}} - \nu_{\text{мин}} \tag{1.15}$$

или

$$D''_f = 20 \lg(\nu_{\text{макс}}/\nu_{\text{мин}}). \tag{1.16}$$

Таким образом, все параметры исследуемой системы, смысл которых в той или иной степени связан с определением искажений сигналов и преобразованиями их формы, оказываются определенными с единых позиций.

Из изложенного в § 1.1 и 1.3 видно, что рассматриваемый единый метод оценки искажений удовлетворяет первым четырем требованиям, сформулированным во введении.

1.4. Связь рассматриваемого метода оценки искажений с другими методами

В заключение данной главы покажем, что рассматриваемый метод оценки искажений, изложенный в самом общем виде, не противоречит существующим методам, а включает в себя многие из них как частные случаи. В большинстве случаев это соответствие можно установить при среднеквадратичном критерии различия сигналов, задав F и Φ следующим образом:

$$F = \overline{[y(t) - \tilde{y}(t)]^2};$$

$$\Phi = \sqrt{F_{\text{мин}} / [\overline{y^2_{\text{п}}(t)} - \overline{y_{\text{п}}(t)}^2]}. \tag{1.17}$$

Здесь и далее черта над величиной обозначает ее усреднение по времени в соответствии с (1.7), если рассматриваются искажения конкретного сигнала, и усреднение по времени и по множеству в соответствии с (1.10), если рассматривается оценка искажений на некотором множестве входных сигналов.

Метод одного тона. При измерении нелинейных искажений по методу одного тона входной сигнал предполагается гармоническим $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ и искажения характеризуются коэффициентом гармоник

$$K_{\text{г}} = \sqrt{\sum_{i=2}^{\infty} A^2_i} \Big/ A_1, \tag{1.18}$$

где A_i — амплитуда i-й гармоники сигнала $y(t)$.

Для гармонического входного сигнала идеальные системы, определенные в соответствии с (1.2) и (1.3), оказываются идентичными и в обоих случаях

$$F=(A_0-a)^2+\frac{1}{2}\left[(A_1-kA)^2+\sum_{i=2}^{\infty}A^2{}_i\right]$$

(такое выражение для F получается после минимизации по τ или по $\varphi(\omega)$). Отсюда

$$a_0=A_0;\ k_0=\frac{A_1}{A};\quad F_{\text{мин}}=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\infty}A^2{}_i;$$

$$y_{\text{п}}(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1);\ \Phi=\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}A^2{}_i}\Big/A_1=K_{\text{г}}.$$

Иногда используется иное выражение для коэффициента гармоник:

$$K'_{\text{г}}=\sqrt{\sum_{i=2}^{\infty}A^2{}_i}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}A^2{}_i}=\frac{K_{\text{г}}}{\sqrt{1+K^2_{\text{г}}}}\approx K_{\text{г}}. \qquad (1.19)$$

При этом $K'_{\text{г}}$ будет совпадать с Φ, если в оценке искажений в соответствии с (1.17) $F_{\text{мин}}$ нормировать не к мощности полезного сигнала, а к мощности всего переменного сигнала на выходе исследуемой системы.

Метод полос шума [23]. При измерении нелинейных искажений по методу полос шума на вход исследуемой системы подается узкополосный шумовой сигнал. Искажения характеризуются коэффициентом

$$K_{\text{ш}}=\sqrt{P_{\text{вн}\Delta\omega}/P_{\Delta\omega}}, \qquad (1.20)$$

где $P_{\Delta\omega}, P_{\text{вн}\Delta\omega}$ — мощности выходного сигнала в полосе частот тестового сигнала и вне этой полосы.

Тогда, если определить идеальную систему согласно (1.3) и предположить, что мощностью продуктов искажений в полосе частот тестового сигнала можно пренебречь, $K_{\text{ш}}$ совпадает с Φ.

Пренебрежение продуктами искажений в полосе тестового сигнала является недостатком метода полос шума [47], который может оказаться существенным при

расширении полосы частот тестового сигнала с целью большего приближения его к реальному сигналу. (В § 3.4 будет дана количественная оценка погрешности, обусловленной этим допущением, которая оказывается довольно значительной.)

Измерение интермодуляционных искажений. В этом случае тестовый сигнал двухтонален: $x(t)=4A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, $\omega_1 \ll \omega_2$, а искажения характеризуются коэффициентом

$$K_{\text{инт}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(A_{\omega_2+i\omega_1}+A_{\omega_2-i\omega_1})^2}\Big/A_{\omega_2}, \qquad (1.21)$$

где $A_{\omega_2\pm i\omega_1}$ — амплитуда гармоники выходного сигнала частоты $\omega_2\pm i\omega_1$. Практически [2] частоту ω_2 выбирают такой, чтобы продукты искажений частот $p\omega_2\pm i\omega_1$ ($p\geqslant 2$) подавлялись системой. Это отражено и в (1.21). Тогда в предположении малости линейных искажений можно показать, что $\Phi=2K_{\text{инт}}/\sqrt{17}$, если идеальная система определена в соответствии с (1.2) или (1.3).

Оценка искажений разностного тона. В этом случае тестовый сигнал также двухтональный: $x(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, $A_1\approx A_2$; $\omega_1\approx\omega_2$, а мерой искажений служит коэффициент

$$K_{\text{рт}}=\sum_{ij}A_{|i\omega_1-j\omega_2|}/(A_{\omega_1}+A_{\omega_2}). \qquad (1.22)$$

Нетрудно показать, что значение $K_{\text{рт}}$ является максимально возможным значением Φ, если идеальная система определена в соответствии с (1.3), а сигналы сравниваются по критерию равномерного приближения, т. е. F и Φ заданы следующим образом:

$$F=\max_t|y(t)-\tilde{y}(t)|;$$

$$\Phi=F_{\text{мин}}/\max_t|y_{\text{п}}(t)-\overline{y_{\text{п}}(t)}|. \qquad (1.23)$$

Действительно, в этом случае после минимизации по $\varphi(\omega)$ и a

$$F=\max_t|(A_{\omega_1}-kA_1)\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+(A_{\omega_2}-kA_2)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+$$
$$+\sum_{i,j}A_{|i\omega_1-j\omega_2|}\cos[(i\omega_1-j\omega_2)t+\varphi_{ij}]|.$$

Значение F не может превышать значения, получаемого при сложении всех гармоник $\varepsilon(t)$ с одинаковыми фазами, т. е.

$$F \leqslant |A_{\omega_1} - kA_1| + |A_{\omega_2} - kA_2| + \sum_{i,j} A_{|j\omega_1 - i\omega_2|}.$$

Пренебрегая линейными искажениями, что допустимо, поскольку $\omega_1 \approx \omega_2$, получаем, что

$$F_{\text{мин}} \leqslant \sum_{i,j} A_{|i\omega_1 - j\omega_2|} \text{ при } k_0 = \frac{A_{\omega_1}}{A_1} = \frac{A_{\omega_2}}{A_2},$$

откуда следует, что $\Phi \leqslant K_{\text{рт}}$.

Оценка нелинейности импульсных устройств. Для оценки нелинейности видеотрактов обычно используют неравномерность первой производной амплитудной характеристики [34, 40], а в качестве тестового применяют пилообразный сигнал. Поскольку в этом случае фактически рассматривают параметры системы без учета свойств передаваемого сигнала, кроме его размаха, установить соотношения, аналогичные предыдущим, можно только весьма искусственным путем [58].

Для тех методов оценки нелинейности импульсных устройств, в которых делается попытка учесть свойства передаваемого сигнала и связать оценку нелинейности с искажениями формы сигнала [20, 25], установить их связь с рассматриваемым методом оказывается довольно просто. Например, в [25] предполагается, что характеристика нелинейного безынерционного элемента может быть представлена в виде $y = f(x) = kx + \varphi(x)$, а степень искажений характеризуется величиной

$$K_{\text{имп}} = \max |\varphi(x)| / \max |y(t)|. \qquad (1.24)$$

При практическом применении этой оценки имеется некоторый произвол в разложении $f(x)$ на линейный и нелинейный компоненты. Этот произвол полностью устраняется, если определить идеальное преобразование согласно (1.2), а F и Φ задать в соответствии с (1.23), тогда Φ совпадает с $K_{\text{имп}}$.

Оценка линейных искажений по частотным, фазовым и переходным характеристикам. Оценка линейных искажений по неравномерности частотных характеристик и нелинейности фазовых (или, что то же самое, по неравномерности группового времени запаздывания) является

методом оценки искажающих свойств системы почти без учета свойств передаваемого сигнала. Поэтому установление взаимосвязи этих методов с рассматриваемым методом оценки искажений реального сигнала затруднительно. Например, можно показать, что, зная максимальную неравномерность частотной характеристики

$$\mu = (\max K(\omega) - \min K(\omega))/(\max K(\omega) + \min K(\omega)),$$

где $K(\omega)$ — частотная характеристика исследуемой системы, можно рассчитать максимально возможные искажения двухтонального сигнала $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, если идеальная система задана в соответствии с (1.3), а F и Φ определены (1.17). Тогда

$$\Phi = \frac{\gamma\mu}{\gamma^2(1+\mu)+1}, \quad \gamma = \frac{A_1}{A_2} < 1. \qquad (1.25)$$

Аналогичные результаты можно получить и для нелинейности фазовой характеристики [58], а также для других критериев различия сигналов.

При оценке качества линейной системы по переходной характеристике обычно используют группу параметров: время нарастания, величину выброса, частоту осцилляций, наклон плоской части и т. д. Эти параметры определяются независимо от свойств передаваемого сигнала, а качество системы характеризуется не одним, а несколькими значениями. Поэтому такой подход оказывается в принципе отличным от рассматриваемого. При попытке устранить некоторый произвол в задании этих параметров (например, уровни отсчетов задают весьма эвристически) используют методы теории аппроксимации (см., например, [42, 53]), приписывая реальной переходной характеристике параметры некоторой функциональной зависимости, для которой они определяются однозначно. Такой подход несколько приближается к рассматриваемому, однако и в этом случае свойства передаваемых сигналов не учитываются.

Оценка линейных искажений реального сигнала. Рассматриваемая в работах [37, 38, 79] оценка линейных искажений реальных сигналов по среднеквадратичному критерию полностью совпадает с Φ, если идеальная система определена (1.2), а F и Φ заданы (1.17).

Искажения сигнала шумом. Применяемые оценки шумовых искажений из-за аддитивного шума прямо или

косвенно выражаются через мощность шума на выходе исследуемой системы. Если идеальное преобразование задано (1.2) или (1.3), а F и Φ — (1.17), то оценка искажений Φ совпадает с отношением шум/сигнал на выходе системы и связана взаимно-однозначным соответствием с большинством применяемых шумовых характеристик.

Мультипликативный шум, как правило, также характеризуется его среднеквадратичным отклонением [41, 46, 96]. В § 4.2 будет показано, что искажения сигнала мультипликативным шумом при среднеквадратичном критерии зависят только от отношения среднеквадратичного отклонения шума к его среднему значению.

Корреляционный метод оценки искажений. Во введении отмечалось, что единственным известным автору методом оценки искажений, применимым к искажениям любой физической природы, является корреляционный метод [70], использующий коэффициент корреляции между входным и выходным сигналами

$$R_{x(t)y(t)} = \frac{\overline{[y(t)-\overline{y(t)}]\,[x(t)-\overline{x(t)}]}}{\sqrt{\overline{[x(t)-\overline{x(t)}]^2}\;\overline{[y(t)-\overline{y(t)}]^2}}}. \qquad (1.26)$$

Если $y(t)=kx(t)+a$, то $|R|=1$. Во всех остальных случаях независимо от причин искажений $|R|<1$. Нетрудно показать, что оценка искажений в соответствии с (1.17) однозначно определяется $R_{x(t)y(t)}$, если идеальная система задана (1.2) и предполагается отсутствие задержки сигнала.

Действительно, в соответствии с (1.17) значение

$$F=\overline{[y(t)-kx(t)-a]^2}=\overline{y^2(t)}+k^2\overline{x^2(t)}+ \\ +a^2-2k\overline{x(t)\,y(t)}-2a\overline{y(t)}+2ka\overline{x(t)}$$

будет минимально при

$$k_0=[\overline{x(t)\,y(t)}-\overline{x(t)}\;\overline{y(t)}]/[\overline{x^2(t)}-\overline{x(t)}^2];$$
$$a_0=[\overline{y(t)\,x^2(t)}-\overline{x(t)}\;\overline{x(t)\,y(t)}]/[\overline{x^2(t)}-\overline{x(t)}^2].$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{\overline{[y(t)-\overline{y(t)}]^2}\;\overline{[x(t)-\overline{x(t)}]^2}}{\{\overline{[y(t)-\overline{y(t)}]\,[x(t)-\overline{x(t)}]}\}^2}-1}=\sqrt{\frac{1}{R^2_{x(t)y(t)}}-1}. \qquad (1.27)$$

Недостатком корреляционного метода, как указывалось в [24], является то, что коэффициент корреляции между входным и выходным сигналами в совпадающие моменты времени оказывается меньше единицы, если произошла неискаженная задержка сигнала. Для устранения этого недостатка достаточно рассматривать не $R_{x(t)y(t)}$, а максимум $|R_{x(t-\tau)y(t)}|$ по τ. Тогда при среднеквадратичном критерии различия сигналов рассматриваемый метод полностью совпадает с корреляционным.

В [35] излагается статистический метод оценки искажений, основанный на исследовании функции регрессии входного и выходного сигналов в совпадающие моменты времени. Поскольку функция регрессии и коэффициент корреляции взаимно-однозначно определяют друг друга, все сказанное о корреляционном методе относится и к статистическому.

Подытоживая изложенное в данном параграфе, можно сделать вывод, что большинство известных методов оценки искажений оказываются частными случаями единого метода, основанного на сравнении выходных сигналов реальной и идеальной систем по некоторому критерию. Они могут быть получены из него при определенных предположениях о входном сигнале и виде функционалов F и Φ, которые чаще всего представляют собой соответственно среднюю мощность разности сравниваемых сигналов и отношение действующего значения продуктов искажений к действующему значению полезного сигнала. В некоторых случаях это соответствие может быть установлено при использовании критерия равномерного приближения.

Поэтому на базе рассматриваемого метода можно исследовать существующие методы, более четко выявить их достоинства, недостатки и присущие им ограничения, а также обобщить эти методы на различные классы сигналов.

Глава 2

ИЗМЕРЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛА

2.1. Общая структурная схема измерения суммарных искажений

При измерении суммарных искажений рассматриваемым методом в соответствии с (1.5) необходимо по результатам сравнения сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ найти параметры идеальной системы (ИС) α_{i0}, обеспечивающие минимальное значение критерия различия F. После этого можно определить величину искажений Ф и при необходимости, выделив продукты искажений, исследовать их. Таким образом, измерение должно выполняться в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 2.1 [64]. Часть схемы, обведенная штриховой линией начинает функционировать только после минимизации F.

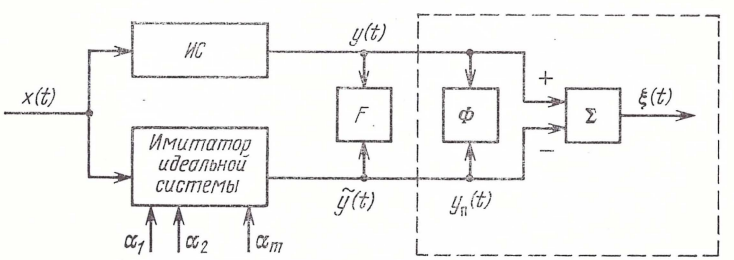


Рис. 2.1.

В большинстве случаев, как это видно, например, из формул (1.17) и (1.23), определить F и Ф можно с помощью одних и тех же устройств. Приборная реализация этих устройств с учетом вида практически применяемых функций потерь может быть выполнена радиоизмерительными средствами, средствами аналоговой вычислительной техники [29, 32] или с применением аппаратуры для определения вероятностных характеристик случайных процессов [45]. Например, при использовании среднеквадратичного критерия (F и Ф заданы формулами (1.17)), определить F и Ф можно измерителями мощности или квадратичными вольтметрами, на

которые подается разность сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$. Для критерия равномерного приближения (F и Φ заданы (1.23)) эту разность через двухполупериодный выпрямитель следует подавать на пиковый вольтметр. Если используется среднемодульный критерий, то необходим вольтметр постоянного тока с двухполупериодным выпрямителем на входе. При интервальном критерии устройство для определения F представляет собою каскадно соединенные амплитудный дискриминатор и вольтметр постоянного тока. Сигнал на выходе дискриминатора равен нулю, если входной сигнал лежит на интервале $[n; m]$, и равен некоторой константе в противном случае.

Постоянные времени всех приборов должны быть равны периоду $x(t)$ или намного превышать его, если входной сигнал периодический. В первом случае необходимо предусмотреть сброс показаний после каждого периода. Если процесс $x(t)$ стационарный, то постоянная времени T должна определяться допустимым значением дисперсии σ^2_F случайной ошибки усреднения, которая равна [36, 45]

$$\sigma^2_F = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_y(\tau)\, d\tau,$$

где $K_y(\tau)$ — автокорреляционная функция процесса, подаваемого на вход усредняющего устройства.

Если входной сигнал $x(t)$ является периодическим или стационарным, то процедура минимизации F может выполняться вручную или автоматически в реальном масштабе времени. В противном случае сигналы $x(t)$ и $y(t)$ необходимо записывать, а затем периодически воспроизводить. Скорость воспроизведения при этом может отличаться от скорости записи.

Обязательным в структурной схеме измерителя суммарных искажений является узел, имитирующий идеальную систему. Этот узел физически и структурно может быть построен иначе, чем исследуемая система. Так, при измерении искажений огибающей в радиоприемнике ($x(t)$ — огибающая входного сигнала, $y(t)$ — электрический сигнал, подаваемый на громкоговоритель, или акустический сигнал на выходе громкоговорителя), имитируя идеальную систему, достаточно использовать высококачественный детектор, на который будет подаваться сигнал с генератора испытательного сигнала. Этот же

сигнал, только ослабленный, поступает на вход исследуемого приемника. Таким образом, имитируя в данном случае идеальный приемник, нет необходимости строить высококачественные УВЧ, смеситель, УПЧ и УНЧ, превосходящие по качеству те, которые имеются в исследуемом приемнике.

Искажения сигнала в самом измерителе искажений и в особенности в имитаторе идеальной системы приводят к аппаратурным ошибкам измерения и должны учитываться при анализе точности измерения. Однако этот анализ можно провести только для конкретной схемы при заданных $\tilde{\mathcal{A}}$, F и Ф. При этом необходимо иметь в виду, что искажения полезного сигнала и продуктов искажений исследуемой системы, которые в большинстве случаев более широкополосны, чем передаваемый сигнал, существенно различны и по-разному влияют на точность измерений.

Необходимость учитывать искажения исследуемых сигналов при измерении не является специфической особенностью данного метода. С такой же необходимостью сталкиваются, например, при измерении коэффициента гармоник измерителем нелинейных искажений, когда точность измерения наряду с другими факторами зависит от степени нелинейных искажений во входном каскаде и в режекторном фильтре, а также от содержания гармоник в тестовом сигнале.

Для уменьшения искажений сигнала при его обработке и уменьшения времени измерения возможно применение цифровой обработки [32]. В этом случае на ЦВМ будут моделироваться как алгоритмы работы идеальной системы, так и алгоритмы определения F и Ф. Реализация цифровых методов, обладающих большими достоинствами (универсальность и быстродействие, простота замены критериев и определений идеальной системы), практически может быть затруднена из-за необходимости большого объема оперативной памяти, в которой должны храниться все значения сигналов $x(t)$ и $y(t)$, что составляет в общей сложности не менее $2T(\Delta f_x+\Delta f_y)$ чисел (T, как и ранее, время наблюдения сигналов, Δf_x и Δf_y — соответственно полосы частот сигналов $x(t)$ и $y(t)$).

Достоинством единого метода измерения искажений является принципиальная возможность контроля суммарных искажений сигнала в процессе нормальной экс-

плуатации исследуемой системы без внесения дополнительных искажений в передаваемый сигнал. При применении традиционных методов это можно обеспечить смешиванием передаваемого сигнала с измерительным [34, 100, 101]. Однако в этом случае для оперативности контроля приходится резко повысить требования к моделированию идеальной системы, которые в ряде случаев (например, для уникальных и сверхдальних систем связи) могут оказаться невыполнимыми. Если же не требуется оперативности контроля (например, при экспериментальной эксплуатации этих систем), то, производя запись принятого и переданного сигналов, можно существенно снизить требования к имитатору идеальной системы.

2.2. К анализу погрешности измерения искажений

При анализе погрешности измерения суммарных искажений будем считать, что функция потерь имеет вид (1.8). Тогда $F_{\text{мин}}=F\{\xi(t)\}$ будет зависеть только от продуктов искажений. Будем также считать, что Ф получено нормировкой $F_{\text{мин}}$ относительно аналогичного функционала от полезного сигнала на выходе исследуемой системы, т. е.

$$\Phi=\frac{F_{\text{мин}}}{F\{\overset{\circ}{\widetilde{y}}(t;\alpha_{1_0};\ldots;\alpha_{m_0})\}}=\frac{F\{\xi(t)\}}{F\{\overset{\circ}{\widetilde{y}}(t;\alpha_{1_0};\ldots;\alpha_{m_0})\}}. \qquad (2.2)$$

Постоянная составляющая входного сигнала $\bar{x}=0$.

К такому виду приводится Ф, задаваемая (1.17), если вместо F рассматривать $\sqrt{F}$, а также Ф, определенная (1.23), и большинство других рассматриваемых далее оценок.

В ряде случаев, например, для интервального критерия, целесообразно положить

$$\Phi=F_{\text{мин}}=F\{\xi(t)\}. \qquad (2.3)$$

В соответствии с обычным в теории ошибок предположением о малости ошибок относительная погрешность измерения Ф, задаваемой (2.2),

$$\gamma_\Phi=\frac{\Delta\Phi}{\Phi}\approx\frac{\Delta F_\xi}{F_{\text{мин}}}+\frac{\Delta F_{\widetilde{y}}}{F\{\overset{\circ}{\widetilde{y}}(t;\alpha_{1_0};\ldots;\alpha_{m_0})\}}, \qquad (2.4)$$

где $\Delta\Phi$, ΔF_{ξ} и $\Delta F_{\widetilde{y}}$ — соответственно абсолютные погрешности измерения Φ, $F_{\text{мин}}$ и $F\{\widetilde{y}(t; \alpha_{10}; \ldots; \alpha_{m0})\}$.

Ограничиваясь учетом основных источников ошибок, погрешность измерения $F_{\text{мин}}$ можно представить в виде

$$\Delta F_{\xi} = \Delta F_0 + \Delta F_{\text{иск}}, \tag{2.5}$$

где ΔF_0 — аппаратурная погрешность измерения F при исследовании конкретного сигнала $\xi_{\text{р}}(t)$; $\Delta F_{\text{иск}}$ — погрешность, обусловленная искажениями сигналов в самом измерителе искажений и неточным совпадением α_i с α_{i0}.

Аппаратурная погрешность ΔF_0 в зависимости от вида F представляет собою погрешность измерения действующего, средневыпрямленного или пикового значения сигнала $\xi_{\text{р}}(t)$, обусловленную неточным выполнением необходимых нелинейных преобразований (квадрирования, выпрямления и т. д.) и конечным временем интегрирования (наблюдения.) Задача анализа этих ошибок является традиционной для радиоизмерений и в данном случае не имеет каких-либо особенностей. При применении для измерения F соответствующих аттестованных серийно выпускаемых приборов максимально возможные значения ΔF_0 можно считать известными.

Наиболее специфическим источником погрешности измерения искажений любым методом являются искажения сигналов при измерении. В данном случае это приводит к тому, что сигнал $\xi_{\text{р}}(t)$ при измерении $F_{\text{мин}}$ отличается от действительных продуктов искажений $\xi(t)$.

Учитывая эти искажения, сигналы, подаваемые на измеритель F, можно представить в виде

$$y_{\text{р}}(t) = y(t) + \xi_y(t) = \widetilde{y}(t; \alpha_{10}; \ldots; \alpha_{m0}) + \xi(t) + \xi_{\text{вх}}(t) + \xi_{\xi}(t); \tag{2.6}$$

$$\widetilde{y}_{\text{р}}(t) = \widetilde{y}(t; \alpha_1; \ldots; \alpha_m) + \xi_{\text{инс}}(t).$$

Здесь $\xi_y(t)$ — продукты искажений сигнала $y(t)$ во входном каскаде измерителя искажений; $\xi_{\text{вх}}(t)$ — то же для полезного сигнала $\tilde{y}(t; \alpha_{10}; \ldots; \alpha_{m0})$; $\xi_{\xi}(t)$ — продукты линейных искажений продуктов искажений $\xi(t)$. Соотношение $\xi_y(t) = \xi_{\text{вх}}(t) + \xi_{\xi}(t)$ записано в предположении малой нелинейности входного каскада. Через $\xi_{\text{инс}}(t)$

обозначены продукты искажений на выходе имитатора идеальной системы. Тогда

$$\xi_{\text{р}}(t) = y_{\text{р}}(t) - \tilde{y}_{\text{р}}(t) = \xi(t) + \Delta\xi(t), \qquad (2.7)$$

где

$$\Delta\xi(t) = \Delta\tilde{y}(t) + \xi_{\text{вх}}(t) + \xi_{\xi}(t) - \xi_{\text{инс}}(t);$$

$$\Delta\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t; \alpha_{10}; \ldots; \alpha_{m0}) - \tilde{y}(t; \alpha_1; \ldots; \alpha_m).$$

Первое слагаемое в выражении для $\Delta\xi(t)$ обусловлено неидентичностью параметров α_i имитируемой идеальной системы и параметров α_{i0} реальной системы. Далее для сокращения записи будем опускать аргументы t у сигналов, для которых определяется F.

Все критерии отличия сигналов, приведенные в табл. 1, можно трактовать как расстояние в метрическом пространстве функций [10]. (Для среднеквадратичного критерия в этом случае, как и делаем в данном параграфе, следует рассматривать не F, а $\sqrt{F}$.) Расстояния в метрическом пространстве удовлетворяют неравенству треугольника [10], являющемуся обобщением аналогичного геометрического соотношения. В соответствии с этим неравенством

$$|F\{x_1(t)\} - F\{x_2(t)\}| \leqslant F\{x_1(t) + x_2(t)\} \leqslant F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\}. \qquad (2.8)$$

Для среднеквадратичного критерия, например, неравенство треугольника означает, что действующее значение суммы двух сигналов не превышает суммы их действующих значений и не может быть меньше модуля разности этих действующих значений.

В соответствии с (2.7) и (2.8) и в предположении $F\{\xi\} > F\{\Delta\xi\}$, что эквивалентно предположению о достаточно высокой точности измерений,

$$F\{\xi\} - F\{\Delta\xi\} \leqslant F\{\xi_{\text{р}}\} = F\{\xi + \Delta\xi\} \leqslant F\{\xi\} + F\{\Delta\xi\},$$

откуда следует, что погрешность $\Delta F_{\text{иск}} = F\{\xi_{\text{р}}\} - F\{\xi\}$ не превышает по абсолютному значению $F\{\Delta\xi\}$.

Применяя к $F\{\Delta\xi\}$ неравенство многоугольника (обобщение неравенства треугольника), получаем

$$|\Delta F_{\text{иск}}| \leqslant F\{\Delta\xi\} \leqslant F\{\Delta\tilde{y}\} + F\{\xi_{\text{вх}}\} + F\{\xi_{\text{инс}}\} + F\{\xi_{\xi}\}. \qquad (2.9)$$

Аналогично (2.5)

$$\Delta F_{\tilde{y}} = \Delta F_0\{\tilde{y}\} + \Delta F_{\Delta\tilde{y}}, \qquad (2.10)$$

где ΔF_0, как и ранее, аппаратурная погрешность измерения $F\{\tilde{y}\}$, а $\Delta F_{\Delta\tilde{y}}$ — погрешность, обусловленная отличием сигналов $\tilde{y}(t;\ \alpha_1;\ \ldots;\ \alpha_m)$ и $\tilde{y}(t;\ \alpha_{10};\ \ldots;\ \alpha_{m0})$. С учетом определения $\Delta\tilde{y}$ в (2.7) из (2.8) следует, что

$$|\Delta F_{\Delta\tilde{y}}| \leqslant F\{\Delta\tilde{y}\}. \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.9) в (2.5), (2.11) в (2.10) и полученные результаты в (2.4), имеем

$$|\gamma_\Phi| \leqslant \frac{\Delta F_0\{\xi\}}{F\{\xi\}} + \frac{\Delta F_0\{\tilde{y}\}}{F\{\tilde{y}\}} + F\{\Delta\tilde{y}\}\left[\frac{1}{F\{\xi\}} + \frac{1}{F\{\tilde{y}\}}\right] + \\ + \frac{F\{\xi_{\text{зх}}\}}{F\{\xi\}} + \frac{F\{\xi_{\text{иис}}\}}{F\{\xi\}} + \frac{F\{\xi_\xi\}}{F\{\xi\}}.$$

Два первых слагаемых представляют собою относительные погрешности измерения F, и их в большинстве случаев можно положить равными нормируемому значению относительной погрешности γ_F. Поскольку $F\{\tilde{y}\} \gg F\{\xi\}$, вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Поэтому третье слагаемое в формуле для $|\gamma_\Phi|$ будет иметь вид $\mu_F = F\{\Delta\tilde{y}\}/F\{\xi\}$. Оценить его значение можно следующим образом. Параметры α_{i0} находят минимизируя F. При этом минимизация в окрестности α_{i0} возможна до тех пор, пока изменения параметров α_i приводят к наблюдаемым изменениям F. Поэтому значение $F\{\Delta\tilde{y}\}$ близко к значению абсолютной нечувствительности измерителя F, а μ_F не превышает максимальной относительной нечувствительности. Во многих случаях величиной μ_F можно пренебречь.

Домножая числитель и знаменатель четвертого и пятого слагаемых на $F\{\tilde{y}\}$, с учетом (2.2) получаем

$$\frac{F\{\xi_{\text{вх}}\}}{F\{\xi\}} = \frac{\Phi_{\text{вх}}}{\Phi}; \quad \frac{F\{\xi_{\text{иис}}\}}{F\{\xi\}} = \frac{\Phi_{\text{иис}}}{\Phi},$$

где Φ, как и ранее, искажения сигнала в исследуемой системе; $\Phi_{\text{вх}}$, $\Phi_{\text{иис}}$ — искажения полезного сигнала во входных цепях измерителя искажений и в имитаторе идеальной системы. Очевидно, что искажения $\Phi_{\text{вх}}$ и $\Phi_{\text{иис}}$ рассчитывают по тому же критерию, что и искажения в исследуемой системе.

Сопоставляя последнее слагаемое в полученной формуле с (2.2), нетрудно увидеть, что его можно рассма-

тривать как оценку линейных искажений Φ_ξ продуктов искажений $\xi(t)$ во входном каскаде.

С учетом сделанных замечаний окончательно получаем

$$|\gamma_\Phi| \leqslant 2\gamma_F + \mu_F + \frac{\Phi_{вх} + \Phi_{иис}}{\Phi} + \Phi_\xi. \qquad (2.12)$$

Для оценок Ф, задаваемых в соответствии с (2.3), аналогично (2.12) имеем

$$|\gamma_\Phi| \leqslant \gamma_F + \mu_F + \frac{\Phi_{вх} + \Phi_{иис}}{\Phi} + \Phi_\xi. \qquad (2.13)$$

Соотношения (2.12) и (2.13) для расчета максимальной относительной погрешности получены на основе неравенства треугольника, характеризующего наихудший случай. Они приводят к линейному суммированию различных погрешностей. Могут быть обоснованы и другие способы суммирования, например квадратичный. Выбор способа суммирования в данном случае ничем не отличается от аналогичных задач в радиоизмерениях, и его можно сделать в соответствии с рекомендациями, изложенными, например, в [50]. При этом должен учитываться конкретный вид схемы измерителя, в частности способ имитации идеальной системы, который определяет способ расчета $\Phi_{иис}$. Кроме того, при анализе погрешностей конкретных схем при заданных F и Ф может оказаться целесообразной замена критерия оценки линейных искажений продуктов искажений, поскольку в отличие от $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$ некоторые виды искажений $\xi(t)$ могут не влиять на точность измерения.

2.3. Измерение суммарных искажений в видеотрактах и им подобных

При моделировании идеальной системы, определенной в соответствии с (1.2), необходимо варьировать усиление и задержку входного сигнала и его постоянную составляющую (рис. 2.2). Если $k_0 > 1$, то для уменьшения искажений при измерении вместо усиления входного сигнала целесообразно ослаблять сигнал $y(t)$. Если уровни сигналов $x(t)$ и $y(t)$ малы для нормальной работы измерителей F и Ф, целесообразно использовать идентичные усилители, работающие с сигналами одина-

ковых уровней, так как в этом случае возникающие в усилителях искажения частично компенсируются.

Наиболее сложным узлом структурной схемы является задерживающее устройство с варьируемой задержкой, которое должно вносить малые искажения. Для выполнения этой операции можно рекомендовать широко применяемую при корреляционных измерениях запись сигнала на магнитную ленту или барабан с последующим воспроизведением с помощью головки, положение которой относительно записывающей головки может меняться.

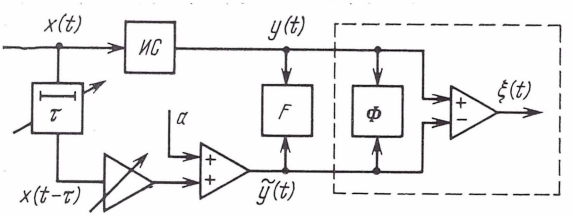


Рис. 2.2.

Для уменьшения искажений сигнала при его задержке удобно использовать временну́ю дискретизацию сигнала, поскольку реализация варьируемой задержки импульсов заданной формы (например, прямоугольных) относительно простая инженерная задача. В этом случае в цепи подачи сигналов $x(t)$ и $y(t)$ необходимо включить специальные стробирующие устройства, которые запоминают значения подаваемых на них сигналов в момент подачи стробирующих импульсов и выдают их при подаче импульса считывания (рис. 2.3). При этом стробирующие импульсы $U_{стру}$ на время τ сдвинуты относительно стробирующих импульсов $U_{стрх}$, а считывающие импульсы подаются одновременно на оба устройства. Тогда амплитуда импульса на выходе стробирующего устройства, преобразующего сигнал $x(t)$, $U_{счх}$ будет равна значению этого сигнала в некоторый момент времени t_0, а амплитуда одновременно появляющегося импульса на выходе стробирующего устройства, преобразующего сигнал $y(t)$, $U_{счу}$ будет равна значению этого сигнала в момент времени $t_0+\tau$. Время запоминания стробирующих устройств должно быть больше максимально возможного значения τ_0.

Пример упрощенной схемы стробирующего устройства показан на рис. 2.4 [66]. Режимы транзисторов *T1* и *T2* выбраны такими, что при подаче стробирующих

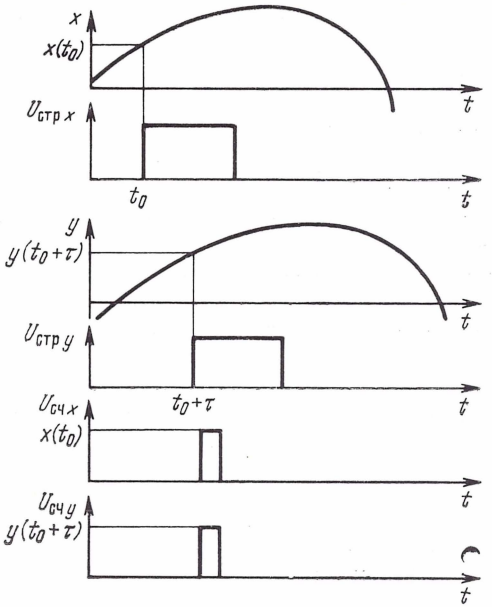


Рис. 2.3.

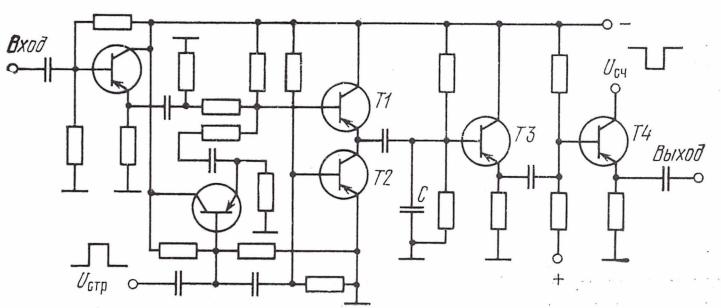


Рис. 2.4.

импульсов они запираются. Транзистор *T4*, наоборот, становится проводящим при подаче считывающего импульса. Постоянная времени $CR_э$ ($R_э$ — входное сопротивление эмиттерного повторителя, выполненного на

транзисторе $T3$) должна быть достаточно большой для запоминания с заданной точностью напряжения входного сигнала на время действия стробирующего импульса. В то же время емкость конденсатора C должна быть достаточно малой, чтобы не вносить линейных искажений в сигнал на выходе эмиттерного повторителя, образованного транзисторами $T1$ и $T2$.

Другие варианты стробирующих устройств можно найти, например, в [13, 22].

Временна́я дискретизация $x(t)$ и $y(t)$, упрощая реализацию варьируемой задержки, может привести к дополнительным погрешностям (к увеличению γ_F в (2.12)), если сигнал $x(t)$ содержит периодическую составляющую с периодом, кратным периоду дискретизации. Для устранения этой погрешности можно использовать импульсы считывания, случайные моменты появления которых равномерно распределены в пределах некоторого периода [63]. Здесь и далее говорится только о считывающих импульсах, поскольку $U_{сч}$, $U_{стрx}$ и $U_{стрy}$ однозначно связаны.

Действительно, пусть необходимо найти среднее по времени некоторой функции f сигнала $x(t)$, который содержит периодическую составляющую с периодом T_0:

$$\lambda = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f[x(t)]\, dt.$$

При использовании дискретных отсчетов λ оценивается по формуле

$$\lambda^* = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} f[x(i\Delta\tau)].$$

Можно показать, что, если отношение $T_0/\Delta\tau$ не является рациональным числом, $\lambda^*=\lambda$. В противном случае (если $T_0/\Delta\tau$ — целое или рациональное число), $\lambda^*\neq\lambda$. Для устранения смещения оценки будем брать отсчеты в случайные моменты времени $t_i = i\Delta\tau+\tau_i$, где τ_i — случайные независимые величины, причем $0\leqslant\tau_i<\Delta\tau$.

Полученная таким образом оценка

$$\lambda^{**} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} f[x(t_i)]$$

будет случайной величиной с математическим ожиданием

$$M[\lambda^{**}] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \int_{i\Delta\tau}^{(i+1)\Delta\tau} f[x(t_i)]\, w_i(t_i)\, dt_i =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \int_{0}^{(N+1)\Delta\tau} f[x(t)]\, w(t)\, dt,$$

где $w_i(t_i)$ — плотность вероятности t_i, отличная от нуля только на интервале $[i\Delta\tau;\ (i+1)\Delta\tau)$, а

$$w(t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(t).$$

Тогда $M[\lambda^{**}] = \lambda$, если $w(t) = 1/\Delta\tau$. Это обеспечивается, если τ_i имеют равномерное распределение на интервале $[0;\ \Delta\tau)$. При этом дисперсия оценки

$$D_{\lambda^{**}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)^2\,\Delta\tau} \int_{0}^{(N+1)\Delta\tau} \{f[x(t)] - \lambda\}^2\, dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{0}^{T_0} \{f[x(t)] - \lambda\}^2\, dt \right\} = 0,$$

поскольку величина интеграла, стоящего под знаком предела, для реальных сигналов всегда конечна.

Таким образом, оценка λ^{**}, полученная усреднением равномерно распределенных случайных отсчетов, является несмещенной и состоятельной.

При среднеквадратичном критерии различия сигналов для определения F и Φ можно использовать измеритель средней мощности или квадратичный вольтметр. При этом, не нарушая общности, можно считать, что средние значения $x(t)$ и $y(t)$ равны нулю. Действительно,

$$F = \overline{[y(t) - kx(t-\tau) - a]^2} = \overline{y^2(t)} + k^2\overline{x^2(t-\tau)} +$$
$$+ a^2 - 2k\,\overline{y(t)\,x(t-\tau)} - 2a\overline{y(t)} + 2ka\,\overline{x(t)}$$

будет минимален при $a_0 = \overline{y(t)} - k_0\overline{x(t-\tau_0)}$. Поскольку в § 1.1 было сделано предположение, что постоянные составляющие сигналов неинформативны, вместо сигналов $x(t)$ и $y(t)$ можно рассматривать центрированные сигналы $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - \overline{x(t)}$ и $\overset{\circ}{y}(t) = y(t) - \overline{y(t)}$, средние значе-

ния которых равны нулю. Тогда $a_0=0$ независимо от значения k и необходимость поиска минимума F по a отпадает.

С учетом всех сделанных замечаний на рис. 2.5 приведена структурная схема измерителя искажений в видеотрактах по среднеквадратичному критерию. При разомкнутом ключе B калибруется уровень полезного сигнала с помощью аттенюатора *1*, после чего при замкнутом ключе с помощью аттенюатора *2* и изменением времени задержки стробирующего импульса $U_{стру}$ относительно стробирующего импульса $U_{стрх}$ минимизируются показания квадратичного вольтметра. Минимум этих показаний характеризует степень искажений, а значения τ_0 и k_0 [дБ]$=k_x-k_y$, где k_x и k_y — затухания аттенюаторов *1* и *2* соответственно, представляют собой эквивалентное время задержки и эквивалентный коэффициент усиления исследуемой системы.

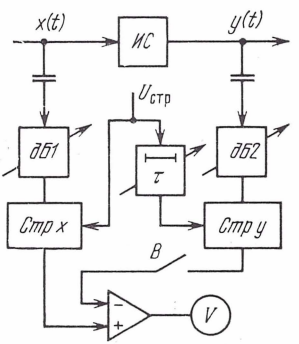


Рис. 2.5.

Структурная схема на рис. 2.5 совпадает со схемой интерференционного коррелометра [45], а поиск минимума F эквивалентен поиску максимума взаимно-корреляционной функции. Это является следствием отмеченного в § 1.4 соответствия между единым и корреляционным методами измерения искажений. Поэтому для измерения искажений по среднеквадратичному критерию в видеотрактах применим коррелометр. При этом необходимо иметь в виду, что некоторые типы коррелометров (например, знаковый) применимы для измерения корреляционных функций только нормальных случайных процессов. Такие приборы неприменимы в общем случае для измерения искажений.

При использовании критерия равномерного приближения в схеме на рис. 2.5 квадратичный вольтметр следует заменить пиковым вольтметром с двухполупериодным выпрямителем на входе.

2.4. Измерение суммарных искажений в электроакустических трактах и им подобных

Если идеальная система определена в соответствии с (1.3), то при ее моделировании необходимо иметь линейную систему с равномерной частотной характеристикой и варьируемой фазовой. Возможность создания такой системы вызывает сомнения. Положение несколько упрощается, если используется среднеквадратичный критерий. Тогда для сигналов конечной энергии имеем

$$F = \overline{[y(t) - \tilde{y}(t)]^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\dot{A}_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega,$$

где

$$\dot{A}_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

— комплексный спектр $\varepsilon(t)$. С учетом (1.3)

$$\dot{A}_\varepsilon(\omega) = \dot{A}_y(\omega) - k\dot{A}_x(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} - 2\pi a\delta(\omega);$$

$$F = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\dot{A}_y(\omega) - k\dot{A}_x(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)} - 2\pi a\delta(\omega)|\, d\omega.$$

Отсюда получаем, что значение F будет минимально при $\varphi_0(\omega) = \arg \dot{A}_y(\omega) - \arg \dot{A}_x(\omega)$ и $a_0 = 0$, если $\dot{A}_y(\omega)$ и $\dot{A}_x(\omega)$ не имеют δ-функций на нулевой частоте. В общем случае, исключая точку $\omega = 0$ из рассмотрения, получаем

$$F_{\text{мин}} = \frac{1}{\pi}\int_{+0}^{\infty} [A_y(\omega) - k_0 A_x(\omega)]^2 d\omega;$$

$$\Phi = \sqrt{F_{\text{мин}} \Big/ \frac{k_0^2}{\pi}\int_{+0}^{\infty} A^2{}_x(\omega)\, d\omega}, \qquad (2.14)$$

где $k_0 = \int_{+0}^{\infty} A_x(\omega) A_y(\omega)\, d\omega \Big/ \int_0^\infty A^2{}_x(\omega)\, d\omega.$

Если сигнал $x(t)$ является стационарным случайным процессом, различные реализации которого отличаются только фазовым спектром, то, рассуждая аналогично, можно показать, что

$$F_{\text{мин}} = \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{\infty} \left[\sqrt{S_y(\omega)} - k_0 \sqrt{S_x(\omega)}\right]^2 d\omega,$$

$$\Phi = \sqrt{F_{\text{мин}} \Big/ \frac{k^2_0}{\pi} \int_{+0}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega} \tag{2.15}$$

при $k_0 = \int_{+0}^{\infty} \sqrt{S_x(\omega) S_y(\omega)}\, d\omega \Big/ \int_{+0}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega,$

где $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ — энергетические спектры сигналов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно.

Для стационарных процессов общего вида

$$F_{\text{мин}} = \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{\infty} [S_y(\omega) - 2k_0 |S_{xy}(\omega)| + k^2_0 S_x(\omega)]\, d\omega,$$

$$\Phi = \sqrt{F_{\text{мин}} \Big/ \frac{k^2_0}{\pi} \int_{+0}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega}, \tag{2.16}$$

где

$$k_0 = \int_{+0}^{\infty} |S_{xy}(\omega)|\, d\omega \Big/ \int_{0}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega;$$

$S_{xy}(\omega)$ — взаимно-энергетический спектр сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Из формул (2.14)—(2.16) видно, что в процессе измерения искажений необходимо измерить спектры (амплитудные или энергетические) входного и выходного сигналов, а затем сравнить их. Это значит, что при идеальной системе (1.3) непосредственное сравнение сигналов эквивалентно сравнению их спектров.

В результате измерения спектров без применения цифровых методов можно получить только их сглаженные оценки [45]

$$A^*(\omega) = \left\{ \int_0^\infty [A(\Omega)]^2 Q(\omega; \Omega)\, d\Omega \right\}^{1/2};$$

$$S^*(\omega) = \int_0^\infty S(\Omega) Q(\omega; \Omega)\, d\Omega, \tag{2.17}$$

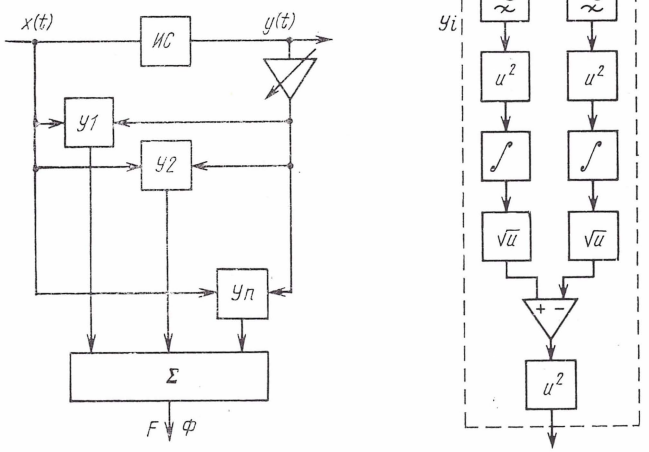


Рис. 2.6.

где Q — некоторая весовая функция, например,

$$Q(\omega; \Omega) = \begin{cases} 1/\Delta\omega, & |\omega - \Omega| \leqslant \Delta\omega/2, \\ 0, & |\omega - \Omega| > \Delta\omega/2. \end{cases}$$

Учитывая это, интегрирование в (2.14)—(2.16) можно приближенно заменить суммированием, в результате чего придем к структурной схеме, показанной на рис. 2.6. Частоты полосовых фильтров ω_i и ω_{i+1} отстоят друг от друга на величину $\Delta\omega$, равную полосе пропускания, в результате чего эти фильтры перекрывают всю полосу частот исследуемых сигналов.

Схему можно упростить, если сравнивать по квадратичному критерию энергетические спектры, а не квадратные корни из них. Тогда из структурной схемы устройства Yi можно исключить нелинейные элементы с характеристиками $f(x)=\sqrt{x}$. Однако получаемая таким образом оценка не будет иметь четкого физического смысла.

Измерение искажений электроакустического тракта становится еще более простым, если входной сигнал представляет сумму гармонических колебаний с извест-

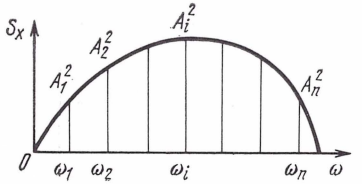


Рис. 2.7.

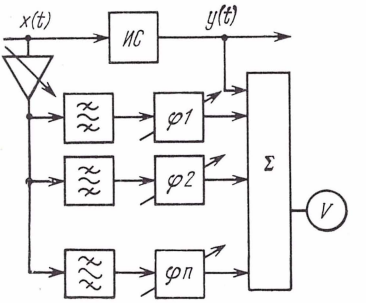


Рис. 2.8.

ными взаимно-простыми частотами (отношение ω_i/ω_j при $i\neq j$ не является рациональным):

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t+\varphi_i). \qquad (2.18)$$

Такой сигнал можно использовать как тестовый для измерения суммарных искажений реального сигнала с непрерывным спектром, если A^2_i вписаны в кривую $S_x(\omega)$ (рис. 2.7). В этом случае

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} A_{yi} \cos(\omega_i t+\varphi_{yi})+\xi_{\text{нл ш}}(t),$$

где $\xi_{\text{нл ш}}(t)$ — составляющая сигнала $y(t)$, обусловленная нелинейными искажениями и внутренним шумом исследуемой системы.

Последнее представление сигнала $y(t)$ справедливо при сделанных предположениях относительно частот ω_i, так как в этом случае продукты нелинейных искажений

не могут содержать компоненты на частотах, совпадающих с частотами составляющих сигнала $x(t)$. Тогда, полагая $a_0=0$, имеем

$$\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{n}\{A_{yi}\cos(\omega_i t+\varphi_{yi})-kA_i\cos[\omega_i t+\varphi_i+\varphi(\omega_i)]\}+\xi_{\text{нл ш}}(t).$$

Нетрудно показать, что для всех критериев F будет минимальным, если каждое слагаемое полученной суммы будет иметь минимально возможную амплитуду. Это будет выполнено, если $\varphi(\omega_i)=\varphi_{yi}-\varphi_i$, т. е. фазовую характеристику идеальной системы необходимо варьировать только в точках ω_i. Тогда

$$\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{n}(A_{yi}-kA_i)\cos(\omega_i t+\varphi_{yi})+\xi_{\text{нл ш}}(t).$$

Структурная схема измерения искажений в соответствии с полученным результатом приведена на рис. 2.8. При измерении необходимо обеспечивать минимум F, компенсируя с помощью фазовращателей фазовые сдвиги составляющих входного сигнала и изменяя коэффициент усиления. Тип вольтметра зависит от вида критерия F. Однако в данном случае входной сигнал приближенно можно рассматривать как нормальный случайный процесс. Если продукты искажений не будут существенно отличаться от нормального процесса, то окажутся выполненными условия, при которых практически значения всех критериев однозначно определяются значением среднеквадратичного критерия.

Наличие большого числа фазовращателей при большом числе гармоник входного сигнала усложняет процедуру измерения. Значительное упрощение возможно при среднеквадратичном критерии. В этом случае

$$F_{\text{мин}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(A_{yi}-kA_i)^2+\overline{\xi^2_{\text{нл ш}}(t)};$$

$$\Phi=\sqrt{2F_{\text{мин}}/k^2_0\sum_{i=1}^{n}A^2_i}, \qquad (2.19)$$

где $k_0=\sum_{i=1}^{n}A_{yi}A_i\Big/\sum_{i=1}^{n}A^2_i$.

Тогда для измерения искажений применима схема, показанная на рис. 2.9 [3].

Полосовые фильтры для схем на рис. 2.8 и 2.9, настроенные на частоты ω_i, должны иметь полосу пропускания, намного меньшую расстояния между соседними

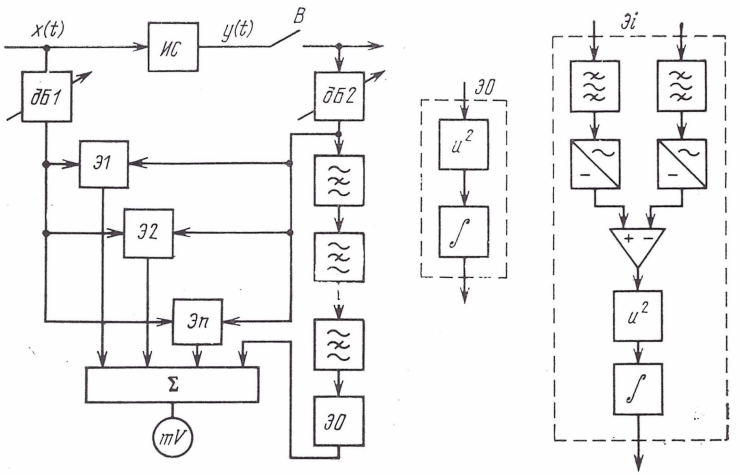


Рис. 2.9.

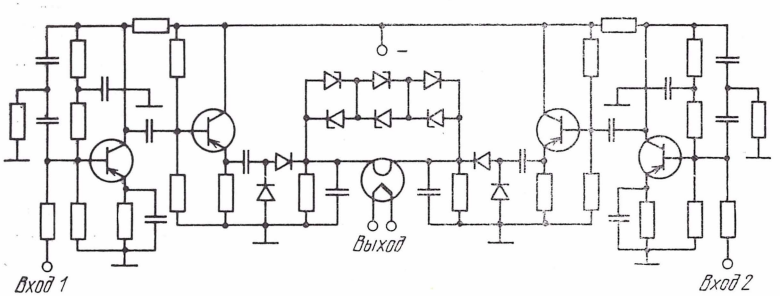


Рис. 2.10.

частотами $\Delta\omega_i$, чтобы свести к минимуму мощность продуктов нелинейных и шумовых искажений, проникающих через эти фильтры и вызывающих ошибки в измерении $(A_{yi}—kA_i)^2$. Вместо режекторных фильтров можно использовать цепи компенсации гармоник сигнала $y(t)$ с частотами ω_i сигналами с выходов соответствующих полосовых фильтров. Возможно также измерение полной

мощности сигнала $y(t)$ и исключение из неё мощностей сигналов на выходах полосовых фильтров.

Процедура измерения по структурной схеме на рис. 2.9 такая же, как и по структурной схеме на рис. 2.5.

На рис. 2.10 показан возможный вариант принципиальной схемы блока *Эi*. Полосовые фильтры выполнены на двойных Т-мостах *RC*, функции квадратора и интегратора выполняет термопреобразователь ТБГ. Блок *Э0*

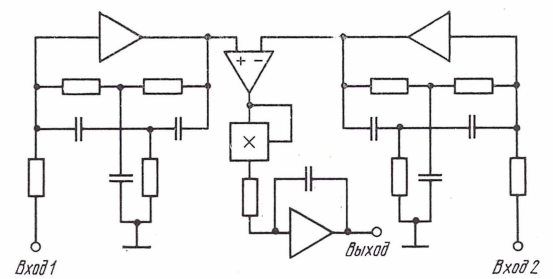


Рис. 2.11.

представляет собою термопреобразователь, включенный на выходе эмиттерного повторителя (цепочка стабилитронов, включенная параллельно термопреобразователю, предохраняет его от перегрузок).

На рис. 2.11 показан другой вариант схемы устройства *Эi* на базе интегральных микросхем. Полосовые фильтры и интеграторы выполнены на основе операционного усилителя 1УТ531 [13] или другого аналогичного, а функции квадратора выполняет перемножитель — балансный модулятор 1МА401.

Прибором, выполненным по структурной схеме на рис. 2.9, измерялись искажения электрического тракта радиовещательных приемников [3]. Измеряемые суммарные искажения включали в себя линейные и нелинейные искажения, а также шумовые, обусловленные собственным шумом приемника и помехами по соседним и зеркальному каналам.

В качестве сигнала $x(t)$ использовался полигармонический сигнал, сформированный с помощью десяти звуковых генераторов. Спектр этого сигнала (рис. 2.12,*а*) охватывает всю исследуемую полосу частот и близок по форме спектру симфонического оркестра. Сигналом $x(t)$ модулировался сигнал генератора стандартных сигналов (ГСС), подаваемый на антенный вход приемника в качестве полезного сигнала.

Помехи по соседним каналам имитировались сигналами двух других ГСС, которые были расстроены относительно частоты полезного сигнала на ± 10 кГц. Поскольку искажения из-за помехи по соседнему каналу существенно зависят от закона ее модуляции, эти сигналы также модулировались полигармоническим сигналом, спектр которого отличался от спектра полезного сигнала (рис. 2.12,*б*).

Искажения из-за помех по зеркальному каналу обусловлены в основном биениями между несущими на промежуточной частоте полезного и мешающего сигналов и слабо зависят от закона модуляции. Поэтому помеха по соседнему каналу имитировалась с помощью немодулированного сигнала четвертого ГСС.

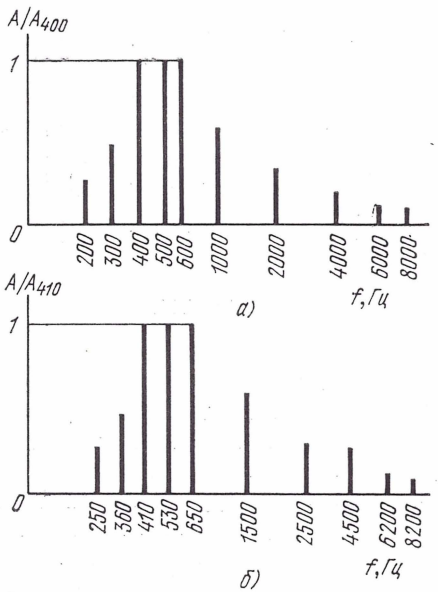


Рис. 2.12.

При испытании заведомо исправного приемника уровень полезного сигнала задавался равным номинальной чувствительности. Уровни мешающих сигналов выбирались такими, чтобы искажения, обусловленные различными факторами, были близкими по значению.

Результаты измерения суммарных искажений Ф двух радиоприемников приведены в табл. 2. Погрешность измерения Ф была не более 20% измеряемой величины. Методика расчета погрешности для этого частного случая измерения искажений, иллюстрирующая общий подход, будет приведена далее.

Различные неисправности приемников имитировались изменением уровней сигналов на входе и с помощью органов управления приемника.

Как видно из результатов измерений, ухудшение хотя бы одного из показателей приемника по сравнению с номинальным приводит

к увеличению Ф, измерение которой требует значительно меньше времени, чем раздельное измерение всех параметров. Более подробно вопрос о возможности применения измерителя суммарных искажений для контроля качества радиоприемников обсуждается в [2, 3].

Таблица 2

Состояние приемника	Способ имитации искажений	Ф	
		„Селга"	„Ригонда"
Исправен	—	0,15	0,08
Реальная чувствительность ниже номинальной	Уровень полезного сигнала уменьшен: в 3 раза в 6 раз	0,36 —	— 0,24
Плохое ослабление:			
одного из соседних каналов	Уровень сигнала одного из соседних каналов увеличен в 6 раз	0,18	0,19
обоих соседних каналов	Уровни сигналов обоих соседних каналов увеличены в 6 раз	0,22	0,21
зеркального канала	Уровень сигнала зеркального канала увеличен в 3 раза	0,19	0,15
Значительные искажения:			
нелинейные	Громкость увеличена до появления небольшой отсечки	0,29	0,17
линейные	Регулятор тембра верхних частот выведен	—	0,16

Остановимся на анализе точности измерения искажений по структурной схеме на рис. 2.9.

Источниками погрешности являются неидеальный характер полосовых и режекторных фильтров, искажения сигналов входными устройствами и модулятором ГСС, а также ошибки термопреобразователей или заменяющих их устройств и милливольтметра. Рассмотрим влияние каждого из этих источников, введя предварительно следующие обозначения:

$$N_n = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad N_0 = p_0,$$

где p_i $(i=\overline{0, n})$ — напряжения на выходах устройств $Эi$ при замкнутом ключе B.

Неравномерность частотных характеристик полосовых фильтров в пределах полосы пропускания. Теоретически полосовые фильтры должны иметь возможно более узкую полосу пропускания. Однако

практически ее сужение ограничено разбросом характеристик фильтров и нестабильностью частот генераторов, формирующих тестовый сигнал. Очевидно, что в пределах полосы пропускания частотная характеристика не будет равномерной и вносимую при этом погрешность можно трактовать как линейные искажения в имитаторе идеальной системы. Для оценки этих искажений можно воспользоваться (2.19) в предположении, что нелинейные и шумовые искажения отсутствуют. Тогда, подставляя в (2.19) $A_i K_{xi}(\omega_i)$ вместо A_i и $A_i K_{yi}(\omega_i)$ вместо A_{yi}, получаем

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} A^2_i K^2_{xi}(\omega_i) \sum_{i=1}^{n} A^2_i K^2_{yi}(\omega_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n} A^2_i K_{xi}(\omega_i) K_{yi}(\omega_i)\right]^2} - 1},$$

где $K_{xi}(\omega_i)$ и $K_{yi}(\omega_i)$ — нормированные частотные характеристики i-го полосового фильтра в цепи подачи сигнала $x(t)$ и в цепи сигнала $y(t)$ соответственно.

Неполное подавление сигнала полосовыми фильтрами вне полосы пропускания. Вследствие этого на N_n будут влиять не только продукты линейных искажений, но частично и продукты нелинейных и шумовых искажений $\xi_{нл\,ш}(t)$, что можно рассматривать как искажения продуктов искажений

$$\Phi_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \sum_{i=1}^{n} K^2_{yi}(\omega\, d\omega) \Big/ \int_0^{\infty} S_\xi(\omega)\, d\omega},$$

где $S_\xi(\omega)$ — энергетический спектр сигнала $\xi_{нл\,ш}(t)$.

Неполное подавление полезного сигнала режекторными фильтрами. Из-за неполного подавления в сигнале $y(t)$ гармоник с частотами ω_i напряжение N_0 увеличивается. Это увеличение можно трактовать как искажения идеальной системы или искажения сигнала $y(t)$, что не изменит результатов расчета по формуле (2.12):

$$\Phi_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A^2_{yi} K^2_{рф\,i}(\omega_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} A^2_{yi}},$$

где $K_{рф\,i}(\omega)$ — нормированная частотная характеристика i-го режекторного фильтра.

Неравномерность частотной характеристики режекторных фильтров вне полосы подавления. Ее влияние эквивалентно линейным искажениям продуктов искажений $\xi_{нл\,ш}$ линейной системой с частотной характеристикой

$$K_{рф}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} K_{рф\,i}(\omega) \approx \sum_{i=1}^{n} K_{рф\,i}(\omega) - (n-1)$$

(приближение записано в предположении высокой добротности фильтров, что справедливо). Возникающие при этом искажения обозначим через Φ_4.

Искажения в модуляторе ГСС. В результате этих искажений огибающая сигнала ГСС, подаваемого на исследуемый приемник, будет отличаться по форме и спектральному составу от сигнала (2.18), что приведет к появлению в сигнале $y(t)$ дополнительных продуктов искажений, отличных от продуктов искажений приемника. Эти искажения эквивалентны по своему действию искажению $y(t)$ на входе. Эти искажения обозначим через Φ_5.

Искажения сигнала во входном каскаде. Величину этих искажений обозначим через Φ_6.

Погрешности термопреобразования и милливольтметра будем характеризовать максимально возможными относительными значениями $\gamma_{тп}$ и γ_{mV} соответственно.

С учетом сказанного о действии каждого искажающего фактора можно записать

$$\Phi_{инс} \leqslant \Phi_1 + \Phi_3;\ \Phi_{вх} \leqslant \Phi_5 + \Phi_6;\ \Phi_\xi \leqslant \Phi_2 + \Phi_4.$$

Поскольку показания милливольтметра пропорциональны квадрату действующего значения, то $\gamma_0 \leqslant (\gamma_{тп} + \gamma_{mV})/2$. Подставляя эти значения в (2.12), имеем

$$|\gamma_\Phi| \leqslant \gamma_{тп} + \gamma_{mV} + \Phi_2 + \Phi_4 + (\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_5 + \Phi_6)/\Phi. \quad (2.20)$$

Полученная оценка, как уже отмечалось в § 2.2, является завышенной. Уточним ее, проанализировав более подробно процесс измерения.

Искажения $\Phi = \sqrt{N/N_k}$, где $N = N_0 + N_n$, N_k — показания милливольтметра при разомкнутом ключе B. Тогда

$$\gamma_\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N_k}{N_k}\right).$$

Очевидно, что

$$|\Delta N_k/N_k| \leqslant \gamma_{тп} + \gamma_{mV};$$

$$|\Delta N/N| \leqslant \gamma_{тп} + \gamma_{mV} + |\Delta N_\xi/N|,$$

где ΔN_ξ — погрешность N, обусловленная искажениями сигналов.

Измеренное значение $N = N_k\Phi^2$, учитывая введенные обозначения, можно представить в виде

$$N_p = N_{np} + N_{0p};\ N_{np} = N_k(\Phi_л + \Phi_1)^2 + N_k\Phi^2_{нл\,ш}\Phi^2_2,$$
$$N_{0p} = N_k\Phi^2_3 + N(1 - \Phi^2_4)(\Phi_{ншу} + \Phi_5 + \Phi_6)^2, \quad (2.21)$$

где $\Phi_л$ — величина линейных искажений исследуемого сигнала; $\Phi_{нл\,ш}$ — то же для нелинейных и шумовых. При этом $\Phi = \sqrt{\Phi^2_л + \Phi^2_{нл\,ш}}$.

При записи (2.21) учитывалось, что продукты линейных искажений исследуемой системы и имитатора идеальной системы имеют перекрывающиеся спектры и их коэффициент корреляции может

достигать единицы. Учитывалось также, что для тестового сигнала (2.18) продукты линейных искажений практически некоррелированы с продуктами нелинейных искажений и аддитивным шумом. Кроме того, при записи выражения для N_{0p} введением во второе слагаемое сомножителя $1-\Phi^2_4$ учтено ослабление мощности $\xi_{нл\,ш}(t)$ в режекторных фильтрах.

В соответствии с (2.21), пренебрегая членами высшего порядка малости и учитывая, что $\Phi_л<\Phi$ и $\Phi_{нл\,ш}<\Phi$, получаем

$$|\Delta N| \leqslant 2N_k [\Phi\,|\,\Phi_1+\Phi_5+\Phi_6-\Phi^2_4\,|+(\Phi^2\Phi^2_2+\Phi^2_2+\Phi^2_3)/2],$$

откуда

$$|\gamma_\Phi| \leqslant \gamma_{тп}+\gamma_{mV}+\frac{|\Phi_1+\Phi_5+\Phi_6-\Phi^2_4|}{\Phi}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Phi^2_2+\frac{\Phi^2_3}{\Phi^2}\right), \qquad (2.22)$$

что дает меньшее значение, чем (2.20).

Дальнейшее уточнение оценки возможно с учетом вероятностных свойств различных компонентов погрешности.

Из изложенного в предшествующих параграфах данной главы видно, что установки для измерения суммарных искажений по рассматриваемому методу могут быть собраны в основном из серийно выпускаемых измерительных приборов широкого применения: аттенюаторов и усилителей, импульсных генераторов, различных вольтметров и т. д. Только некоторые узлы требуют специальной разработки и изготовления, хотя и для этого нет каких-либо принципиальных ограничений.

2.5. Об измерении отдельных видов искажений с помощью тестовых сигналов

В § 2.3 и 2.4 была рассмотрена возможность измерения суммарных искажений реальных сигналов, обусловленных совместным действием всех искажающих факторов. Знания этой величины вполне достаточно, если исследуемая система нормально функционирует и измеренное значение искажений не превышает допустимого. Однако при превышении искажениями нормы, а также при проектировании системы и ее экспериментальном исследовании важной задачей является диагностика искажений и разложение суммарных искажений на отдельные составляющие, обусловленные различными физическими факторами. При этом, ставя задачу измере-

ния искажений каждого вида (нелинейных, линейных и шумовых), необходимо потребовать, чтобы результаты измерения характеризовали действие искажающего фактора не вообще, а применительно к тому сигналу или множеству сигналов, для работы с которыми предназначено исследуемое устройство.

Трудно предложить универсальные способы измерения отдельных видов искажений при передаче по системе реальных сигналов, т. е. при эксплуатации исследуемой системы. Некоторое исключение представляет структурная схема на рис. 2.9. Сигнал на выходе последовательно соединенных устройств *Э1—Эп* характеризует мощность продуктов линейных искажений, а сигнал на выходе *Э0* определяется мощностью продуктов нелинейных искажений и внутреннего шума. Мощность последнего может быть измерена в отсутствие передаваемого сигнала. Однако полигармонический сигнал с дискретным спектром, для которого разработана эта схема, нетипичен для реальных сигналов. Он скорее представляет собой тестовый сигнал.

Значительно проще решить задачу диагностики искажений, применяя специально подобранный тестовый сигнал, степень искажений которого адекватна степени искажений реального сигнала. Общий подход к выбору таких тестовых сигналов можно сформулировать следующим образом.

На основании расчетов искажений определяют характеристики передаваемого сигнала, от которых зависят искажения каждого вида. Например, нетрудно видеть, что степень линейных искажений зависит от спектрально-корреляционных свойств сигнала. В частности, узкополосный сигнал в широкополосных системах практически не искажается. Гармонический сигнал вообще не подвержен линейным искажениям. Степень нелинейных искажений сигнала в нелинейных безынерционных системах, как будет показано в гл. 3, для широкого класса критериев зависит только от одномерной плотности вероятности передаваемого сигнала. При этом очевидно, что степень нелинейных искажений будет тем меньше, чем меньше мощность входного сигнала.

Установив, какие характеристики входного сигнала определяют искажения каждого вида, можно выбрать тестовый сигнал таким образом, чтобы его характеристики, обусловливающие исследуемые искажения, были такими же, как и у реального сигнала. Другие характе-

ристики тестового сигнала выбирают, исходя из того, чтобы искажения других видов или отсутствовали или были сведены к минимуму. Результаты измерения искажений такого тестового сигнала будут характеризовать степень конкретного вида искажений реального сигнала.

В существующих методах измерения искажений пытаются в некоторой степени учитывать свойства передаваемых сигналов. Например, амплитуду синусоидального или пилообразного сигналов при измерении нелинейных искажений определяют в зависимости от мощности или размаха входного сигнала. Точно так же полосу частот, на которой оценивают неравномерность частотной или нелинейность фазовой характеристик, выбирают в зависимости от полосы частот передаваемого сигнала. Однако при этом остается открытым вопрос о том, является ли задание этих характеристик достаточным для определения степени искажений. Излагаемые далее результаты позволяют в некоторой степени устранить эту неопределенность.

Измерять искажения тестового сигнала можно теми же способами, что и суммарные искажения. Однако, поскольку при выборе тестового сигнала даже при выполнении указанных требований имеется некоторый произвол, а также из-за специфических свойств тестовых сигналов, вытекающих из предъявляемых к ним требований, в ряде случаев можно существенно упростить схему измерений. Поэтому условие более простой реализации измерения искажений каждого вида будет рассматриваться как дополнительное требование, предъявляемое к тестовому сигналу.

При измерении искажений с помощью тестового сигнала возникает специфическая погрешность, обусловленная различием соответствующих характеристик реального и тестового сигналов или, другими словами, реально применяемого тестового сигнала от требуемого. Эта проблема существует и в традиционных методах. Например, при измерении искажений по переходным или по импульсным реакциям приходится исследовать погрешности из-за отличия тестового сигнала от прямоугольного скачка или δ-функции [87]. Однако в рассматриваемом случае эта задача может оказаться более трудной из-за сложности тестового сигнала.

Глава 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

Пусть исследуемая система выполняет нелинейное безынерционное преобразование сигнала, т. е. такое преобразование, при котором значения выходного сигнала в любой момент времени определяются значениями входного сигнала только в тот же момент времени. Таким образом, будем считать, что

$$y(t)=f[x(t)]. \tag{3.1}$$

Такое предположение об исследуемой системе делается в большинстве работ, посвященных теоретическому исследованию и расчету нелинейных искажений.

Отметим, что предположение о безынерционности системы включает в себя предположение об однозначности ее характеристики f, так как в противном случае на интервалах неоднозначности $f(x)$ значения выходного сигнала будут зависеть от значений входного сигнала в предшествующие моменты времени. Так, в частности, элемент с гистерезисной характеристикой вносит фазовые сдвиги в синусоидальный сигнал, что эквивалентно временны́м сдвигам. Очевидно, что если характеристика имеет на интервале многозначности падающий участок (рис. 3.1), то она практически также будет гистерезисной, так как рабочая точка будет перемещаться не по участку с отрицательным наклоном, а по вертикальной прямой ac или bd.

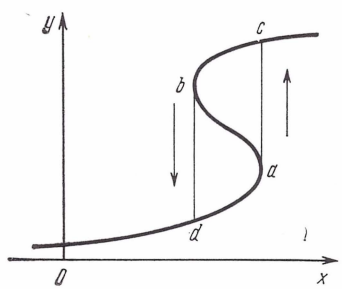


Рис. 3.1.

Таким образом, элемент с неоднозначной характеристикой является инерционным, хотя его инерционность имеет иную физическую природу, иные свойства, чем инерционность, обусловленная реактивными элементами. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $f(x)$ — однозначная функция.

Для безынерционных систем без особых выкладок из физических соображений можно считать $\tau_0=0$, если идеальная система задана (1.2), и $\varphi_0(\omega)\equiv 0$, если идеальная

система задана (1.3). Тогда в обоих случаях неискажающее преобразование будет иметь вид

$$\tilde{y}(t)=kx(t)+a. \tag{3.2}$$

Все отмеченное будем предполагать выполненным на протяжении данной главы.

3.1. Расчет нелинейных искажений по среднеквадратичному критерию

Пусть F и Φ заданы (1.17). Тогда

$$F=\overline{[y(t)-\tilde{y}(t)]^2}=\overline{[y(t)-kx(t)-a]^2},$$

$$\Phi=\sqrt{F_{\text{мин}}/k_0^2\,[\overline{x^2(t)}-\overline{x(t)}^2]}. \tag{3.3}$$

Преобразовав выражение для F, получим, что k_0 и a_0 должны определяться из условия

$$F=\overline{y}^2+2k\overline{xy}+k^2\overline{x^2}+a^2-2a\overline{y}+2ka\overline{x}=\min.$$

Дифференцируя F по k и a, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} k_0\overline{x^2}-\overline{xy}-a_0\overline{x}&=0,\\ a_0-\overline{y}+k_0\overline{x}&=0. \end{aligned}\right\}$$

Нетрудно видеть, что решение этой системы единственное и ему соответствует минимум F. Решая уравнения, получаем

$$k_0=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2}-(\overline{x})^2};\quad a_0=\frac{\overline{y}\,\overline{x^2}-\overline{x}\;\overline{xy}}{\overline{x^2}-(\overline{x})^2};$$

$$\Phi=\sqrt{\frac{(\overline{x^2}-(\overline{x})^2)\,(\overline{y^2}-(\overline{y})^2)}{(\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y})^2}-1}\,. \tag{3.4}$$

Полученные формулы для k_0 и a_0 совпадают с формулами для определения параметров линейной модели при статистической линеаризации нелинейных элементов систем автоматического регулирования [26], где также использовался среднеквадратичный критерий.

Формулы (3.4) упрощаются, если входной сигнал не содержит постоянной составляющей ($\bar{x}=0$):

$$k_0 = \overline{xy}/\overline{x^2},\ a_0 = \bar{y};$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{\overline{x^2}\,(\overline{y^2}-(\bar{y}^2))}{(\overline{xy})^2} - 1}\ . \tag{3.5}$$

Если $x(t)$ — стационарный случайный процесс, для вычисления средних значений, входящих в (3.4) и (3.5), достаточно знать одномерную плотность вероятности входного сигнала $w(x)$, так как

$$\overline{z(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)\, w(x)\, dx, \tag{3.6}$$

где $z(x)$ равно x, x^2, $f(x)$, $f^2(x)$ или $xf(x)$.

Формулу (3.6) можно применять и для детерминированных сигналов, если под $w(x)$ понимать следующую функцию:

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (T_{x,\,\Delta x}/T), \tag{3.7}$$

где T — длина временно́го интервала, на котором исследуется входной сигнал; $T_{x,\,\Delta x}$ — суммарное время пребывания входного сигнала на интервале $[x;\ x+\Delta x]$.

Формула (3.6) применима и для нестационарных случайных процессов с одномерной плотностью вероятности $w(x;\ t)$, заданных на интервале времени $[t_1;\ t_2]$, если

$$w(x) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w(x; t)\, dt. \tag{3.8}$$

Как уже отмечалось, при среднеквадратичном критерии оценка нелинейных искажений синусоидального сигнала по единому методу совпадает с коэффициентом гармоник. Поэтому оценку искажений, определяемую (3.4), можно рассматривать как обобщение метода одного тона на произвольный сигнал $x(t)$. Из (3.4) и (3.6) видно, что степень нелинейных искажений при безынерционном преобразовании зависит только от одномерной плот-

ности вероятности входного сигнала. Синусоидальный сигнал имеет арккосинусное распределение (рис. 3.2)

$$w_c(x)=\begin{cases}1/\pi\sqrt{A^2-x^2}, & |x|\leqslant A,\\ 0, & |x|>A.\end{cases} \tag{3.9}$$

К такой функции $w(x)$ можно прийти, рассматривая синусоиду как случайный стационарный процесс с равномерно распределенной начальной фазой или используя формулу (3.7).

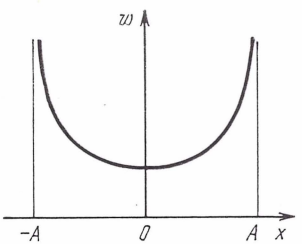


Рис. 3.2.

Реальные сигналы могут иметь распределение, существенно отличающееся от арккосинусного, например нормальное. Поэтому искажения этих сигналов будут существенно отличаться от искажений синусоиды. В § 3.3 вернемся к вопросу о соотношении искажений разных сигналов, а сейчас проиллюстрируем изложенное простейшими примерами расчета искажений.

Пример 3.1. Рассчитать нелинейные искажения сигнала с нормальным распределением

$$w(x)=e^{-x^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma$$

при воздействии его на нелинейный элемент с характеристикой $y=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$.

Прежде чем переходить к вычислениям, отметим, что для нормального распределения нечетные моменты $\overline{x^{2k+1}}=0$, а четные [14]

$$\overline{x^{2k}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2k}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}dx=(2k-1)!!\sigma^{2k}$$

С учетом этого получаем

$$\overline{x}=0;\ \overline{x^2}=\sigma^2;$$
$$\overline{y}=\alpha_1\overline{x}+\alpha_2\overline{x^2}=\alpha_2\sigma^2;$$
$$\overline{xy}=\alpha_1\overline{x^2}+\alpha_2\overline{x^3}=\alpha_1\sigma^2;$$
$$\overline{y^2}=\alpha^2{}_1\overline{x^2}+2\alpha_1\alpha_2\overline{x^3}+\alpha^2{}_2\overline{x^4}=\alpha^2{}_1\sigma^2+\alpha^2{}_2 3\sigma^4,$$

откуда

$$\Phi=\sqrt{\frac{\sigma^2[\alpha^2{}_1\sigma^2+3\alpha^2{}_2\sigma^4-\alpha^2{}_2\sigma^4]}{\alpha^2{}_1\sigma^4}-1}=\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|\sqrt{2}\sigma.$$

Пример 3.2. Решить ту же задачу для пилообразного сигнала амплитудой $U_м$. В этом случае в соответствии с (3.7)

$$w(x) = \begin{cases} 1/U_м, & 0 \leqslant x \leqslant U_м; \\ 0, & x < 0, \ x > U_м \end{cases}$$

и

$$\overline{x^k} = \frac{1}{U_м} \int_0^{U_м} x^k dx = \frac{U^k{}_м}{k+1}.$$

Тогда

$$\overline{x} = U_м/2, \ \overline{x^2} = U^2{}_м/3,$$

$$\overline{y} = \alpha_1 \frac{U_м}{2} + \alpha_2 \frac{U^2{}_м}{3}, \ \overline{xy} = \alpha_1 \frac{U^2{}_м}{3} + \alpha_2 \frac{U^3{}_м}{4},$$

$$\overline{y^2} = \alpha^2{}_1 \frac{U^2{}_м}{3} + \alpha_1 \alpha_2 \frac{U_м}{2} + \alpha^2{}_2 \frac{U^4{}_м}{5},$$

$$\Phi = \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \frac{U_м}{\sqrt{15}} \Bigg/ \sqrt{1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} U_м + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} U_м\right)^2} \approx \frac{|\alpha_2/\alpha_1| U_м}{\sqrt{15}}.$$

3.2. Расчет нелинейных искажений по методу нескольких ординат

При расчете нелинейных искажений синусоидального сигнала иногда применяется графический метод гармонического анализа — метод нескольких ординат [52]. Используя этот метод, можно на экспериментально полученной характеристике выбрать оптимальное положение рабочей точки, обеспечивающее минимум нелинейных искажений однотонального сигнала. Однако, как уже отмечалось, распределение различных сигналов может существенно отличаться от распределения синусоиды. Поэтому для них положение рабочей точки может быть иным. Очевидно, что это отличие будет наиболее значительным для сигналов с несимметричным распределением. В связи с этим целесообразно распространить метод нескольких ординат на расчет нелинейных искажений сигналов с произвольным одномерным распределением [67].

При применении метода нескольких ординат предполагают, что характеристика нелинейного элемента мо-

жет быть представлена в виде полинома

$$y=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i, \tag{3.10}$$

где значения коэффициентов α_i можно определить из решения системы уравнений

$$y_k=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i{}_k, \quad k=\overline{0,n}, \tag{3.11}$$

а отсчетные точки x_k выбирают из удобства вычислений.

При графическом гармоническом анализе коэффициенты α_i не находят в явном виде. Отсчеты y_k используют для непосредственного определения амплитуд высших гармоник выходного сигнала.

В соответствии с (3.4) нелинейные искажения сигнала с характеристикой (3.10) можно рассчитать следующим образом:

$$\Phi=\sqrt{\frac{(\overline{x^2}-(\overline{x})^2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\,(\overline{x^{i+j}}-\overline{x^i}\,\overline{x^j})}{\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(\overline{x^{j+1}}-\overline{x}\,\overline{x^i})\right]^2}-1}\approx$$

$$\approx\frac{1}{|\alpha_1|\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\,[(\overline{x^2}-(\overline{x})^2)(\overline{x^{i+j}}-\overline{x^i}\,\overline{x^j})-\right.$$

$$\left.-(\overline{x^{i+1}}-\overline{x}\,\overline{x^i})\,(\overline{x^{j+1}}-\overline{x}\,\overline{x^j})]\right\}^{1/2}. \tag{3.12}$$

Согласно формуле (3.12) искажения будут определяться $2n$ первыми начальными моментами входного сигнала. Изменение положения рабочей точки c на характеристике нелинейного элемента эквивалентно изменению среднего значения входного сигнала. В общем случае

$$\overline{x^k}=\sum_{\nu=0}^{k}C_k^{\nu}c^{k-\nu}M_{\nu},$$

где C_k^{ν} — число сочетаний из k элементов по ν; M_{ν} — момент входного сигнала, зависящий только от формы $w(x)$, инвариантный к положению рабочей точки.

С учетом этого величина Ф, задаваемая (3.12), будет функцией c и оптимальное положение рабочей точки можно найти из условия $\Phi(c)=\min$.

Для уменьшения объема вычислений целесообразно, преобразовав систему координат, свести задачу к случаю $\bar{x}=0$. Тогда все моменты, входящие в (3.12), не будут зависеть от положения рабочей точки, а функциями от нее будут коэффициенты α_i. При этом

$$\Phi \approx \frac{1}{|\alpha_1|\sqrt{\overline{x^2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \alpha_i(c)\,\alpha_j(c)\,[\overline{x^2}\,\overline{x^{i+j}} - \overline{x^{i+1}}\;\overline{x^{j+1}}]}\,. \quad (3.13)$$

Пример 3.3. Найти оптимальное положение рабочей точки на характеристике, приведенной на рис. 3.3, при преобразовании сигнала с экспоненциальным распределением

$$w(x) = \begin{cases} e^{-(x+1)}, & x \geqslant -1, \\ 0, & x < -1. \end{cases}$$

При таком задании распределения $\bar{x}=0$.

Аппроксимируя характеристику полиномом четвертой степени, получаем

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4.$$

Из графика на рис. 3.3 для ряда значений c определяем значения коэффициентов α_i, которые приведены в табл. 3.

Для расчета нелинейных искажений в соответствии с (3.13) необходимо знать первые восемь моментов входного сигнала. В данном случае

$$M_i = \overline{x^i} = \int_{-1}^{\infty} x^i e^{-(x+1)}\,dx = i! \sum_{\nu=0}^{i} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} =$$

$$= i! \sum_{\nu=2}^{i} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}.$$

Тогда $M_2=1$, $M_3=2$, $M_4=9$, $M_5=44$, $M_6=265$, $M_7=1854$, $M_8=14\,883$.

Результаты расчета искажений сигнала с экспоненциальным распределением $\Phi_э$ приведены на рис. 3.4. Оптимальное положение рабочей точки $c_{э\,опт}=0$. При этом $\Phi_{э\,мин}\approx 8{,}5\%$.

По формуле (3.13), не прибегая к графическому гармональному анализу, можно определить нелинейные искажения синусоидального

сигнала Φ_c, мощность которого равна мощности сигнала с экспоненциальным распределением. В этом случае

$$w(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{2-x^2}, & |x| \leqslant \sqrt{2}, \\ 0, & |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Все нечетные моменты $M_{2k+1}=0$, а четные

$$M_{2k} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{x^{2k}}{\pi\sqrt{2-x^2}}\,dx = \frac{(2k-1)!!}{k!},$$

откуда $M_2=1$, $M_4=3/2$, $M_6=5/2$, $M_8=35/8$.

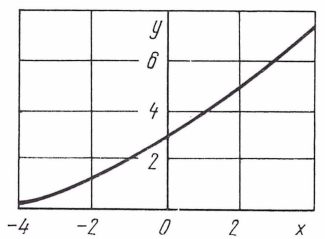


Рис. 3.3.

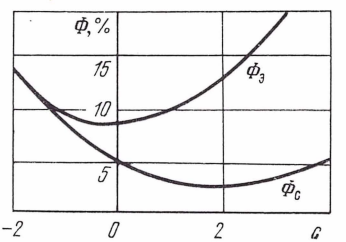


Рис. 3.4.

Результаты расчетов Φ_c показаны на том же рисунке. Для синусоидального сигнала оптимальное положение рабочей точки $c_{c\ опт}\approx 1{,}8$ и $\Phi_{c\ мин}\approx 3\%$.

Таблица 3

c	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
—3	0,59	0,48	1,14	—0,016	0,0008
—2	1,22	0,76	0,095	—0,012	0,0007
—1	2,04	0,93	0,063	—0,009	0,0009
0	3,02	0,98	0,041	—0,006	0,0007
1	4,04	1,07	0,027	—0,003	0,0008
2	5,11	1,11	0,023	0,000	0,0007
3	6,26	1,16	0,029	0,004	0,0009
4	7,46	1,24	0,045	0,007	0,0008

Из рис. 3.4 видно, что минимумы кривых $\Phi(c)$ довольно тупые. Поэтому нет необходимости в особой точности определения $c_{опт}$. Тем не менее, если выбрать оптимальное положение рабочей точки для синусоидального сигнала, то искажения сигнала с экспоненциальным распределением $\Phi_э(c_{c\ опт})\approx 12\%$, т. е. почти в полтора раза больше минимально возможного значения. Из рис. 3.4 также видно, что искажения синусоидального сигнала существенно меньше искажений сигнала с экспоненциальным распределением.

3.3. Оценка нелинейных искажений реального сигнала по результатам измерения коэффициента гармоник

Степень искажений реальных сигналов определяется видом их распределений, которые могут значительно отличаться от распределения синусоиды. Поэтому целесообразно проанализировать возможность ориентировочной оценки искажений реального сигнала, если известны результаты измерения коэффициента гармоник с помощью серийно выпускаемых приборов [65].

Рассмотрим некоторые типичные, часто встречающиеся распределения. При этом будем считать, что средние значения входного сигнала равны нулю.

1. Нормальное распределение (рис. 3.5,*а*)

$$w_{\text{н}}(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi}\sigma. \tag{3.14}$$

Такое распределение имеют многие шумоподобные сигналы, обусловленные совместным действием большого числа независимых факторов. Сравнивая (3.9) и (3.14), видим, что нормальное распределение в некотором смысле является противоположным арккосинусному. Первое распределение отлично от нуля на всей оси x и имеет единственный максимум, второе — финитно и имеет единственный минимум.

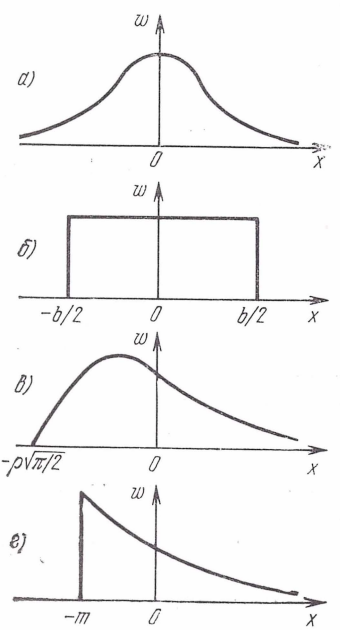


Рис. 3.5.

2. Равномерное распределение (рис. 3.5,*б*)

$$w_{\text{р}}(x) = \begin{cases} 1/b, & |x| \leqslant b/2, \\ 0, & |x| > b/2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Распределение, близкое к равномерному, могут иметь, например, сигналы, передающие телеметрическую информацию, особенно, если в ней отсутствует избыточ-

ность, поскольку равномерное распределение обладает максимальной неопределенностью.

3. Релеевское распределение (рис. 3.5,*в*)

$$w_{\text{р}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\rho\sqrt{\pi/2}}{\rho^2}\exp\dfrac{-(x+\rho\sqrt{\pi/2})^2}{2\rho^2}, & x\geqslant-\rho\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\\ 0, & x<-\rho\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\end{cases} \tag{3.16}$$

Такое распределение имеют сигналы на выходе линейных амплитудных детекторов при действии на их входе нормального процесса. Близко к нему распределение телевизионного видеосигнала.

4. Экспоненциальное распределение (рис. 3.5,*г*)

$$w_{\text{э}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}\,\mathrm{e}^{-(x+m)/m}, & x\geqslant-m,\\ 0, & x<-m.\end{cases} \tag{3.17}$$

Экспоненциальному распределению подчиняется, например, квадрат огибающей нормального случайного процесса, т. е. сигнал на выходе квадратичного амплитудного детектора.

Устанавливая взаимосвязь между искажениями сигналов с перечисленными распределениями и синусоидального сигнала, рассмотрим ряд типичных нелинейных зависимостей, используемых для аппроксимации характеристик нелинейных радиотехнических устройств. Искажения синусоидального сигнала, как и ранее, будем обозначать через $\Phi_{\text{с}}$. Индексы у оценок искажений сигналов с другими распределениями будут соответствовать индексам формул (3.14)—(3.17).

Биномиальные характеристики.

А. Линейно-квадратичная характеристика

$$y=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2. \tag{3.18}$$

Такая характеристика пригодна для аппроксимации малых несимметричных нелинейностей.

Подставляя (3.18) в (3.5), с учетом (3.14)—(3.17) получаем

$$\Phi_{\text{с}}=|\alpha_2/\alpha_1|\,A/2;\quad \Phi_{\text{н}}=|\alpha_2/\alpha_1|\sqrt{2}\,\sigma;$$
$$\Phi_{\text{р}}=|\alpha_2/\alpha_1|\,b/\sqrt{15};\quad \Phi_{\text{э}}=|\alpha_2/\alpha_1|\,2\sqrt{2}\,m,$$
$$\Phi_{\text{Р}}=|\alpha_2/\alpha_1|\sqrt{8-5\pi/2}\,\rho/(2-\pi/2). \tag{3.19}$$

Мощности сигналов с рассматриваемыми распределениями будут равными, если

$$A^2/2=\sigma^2=b^2/12=m^2=\rho^2(2-\pi/2). \qquad (3.20)$$

Считая условие (3.20) выполненным, можно выразить искажения несинусоидальных сигналов через искажения синусоиды равной мощности:

$$\Phi_н=2\Phi_с;\ \Phi_р=2\sqrt{2/5}\Phi_с\approx 1{,}26\Phi_с; \qquad (3.21)$$

$$\Phi_э=2\sqrt{2}\Phi_с;\ \Phi_р=\sqrt{16-5\pi}\Phi_с/(2-\pi/2)^{3/2}\approx 1{,}96\Phi_с.$$

При сопоставлении нелинейных искажений синусоидального сигнала и сигнала с равномерным распределением удобнее приравнять размахи этих сигналов. Тогда, считая $b=2A$, получаем

$$\Phi_р=4\Phi_с/\sqrt{15}\approx 1{,}03\Phi_с. \qquad (3.22)$$

Б. Линейно-кубическая характеристика

$$y=\alpha_1 x+\alpha_3 x^3. \qquad (3.23)$$

С помощью такой характеристики можно аппроксимировать малые симметричные нелинейности. Для синусоидального сигнала такая аппроксимация эквивалентна часто применяемой оценке нелинейных искажений по третьей гармонике.

Проделав вычисления, аналогичные предыдущим, в предположении $\alpha_1 \gg \alpha_3 x^2$, получим

$$\Phi_с=|\alpha_3/\alpha_1|A^2/4;\ \Phi_н=|\alpha_3/\alpha_1|\sqrt{6}\sigma^2;$$
$$\Phi_р=|\alpha_3/\alpha_1|\sqrt{3/7}b^2/10;\ \Phi_э=|\alpha_3/\alpha_1|6\sqrt{2}m^2;$$
$$\Phi_р=|\alpha_3/\alpha_1|\sqrt{128-12\pi-9\pi^2}\rho^2/(8-\pi). \qquad (3.24)$$

При равенстве мощностей сигналов имеем

$$\Phi_н=2\sqrt{6}\Phi_с\approx 4{,}9\Phi_с;$$
$$\Phi_р=12\sqrt{3/7}\Phi_с/5\approx 1{,}57\Phi_с; \qquad (3.25)$$
$$\Phi_э=12\sqrt{2}\Phi_с\approx 17\Phi_с;$$
$$\Phi_р=\sqrt{128-12\pi-9\pi^2}\Phi_с/(2-\pi/2)^2\approx 6{,}7\Phi_с.$$

Согласно (3.25) значение нелинейных искажений сигналов с рассматриваемыми распределениями, кроме равномерного, намного превышает значение искажений синусоидального сигнала той же мощности. Чтобы значения искажений были более близкими, целесообразно ис-

пользовать синусоидальный сигнал, мощность которого на 10 дБ больше мощности реального сигнала. Тогда

$$\Phi_н \approx 0{,}49\Phi_с; \quad \Phi_э \approx 1{,}7\Phi_с; \quad \Phi_р \approx 0{,}67\Phi_с. \qquad (3.26)$$

При равенстве размахов синусоидального и равномерно распределенного сигналов

$$\Phi_р = 8\sqrt{3/7}\,\Phi_с/5 \approx 1{,}05\Phi_с. \qquad (3.27)$$

Идеальное ограничение. Характерной особенностью такого ограничения является то, что сигналы с финитными распределениями (равномерным или арккосинусным) при малых мощностях или, что то же самое, при малых размахах не подвергаются искажениям, тогда как сигналы с нефинитными распределениями, нормальным, экспоненциальным или релеевским, искажаются всегда. Поэтому практически интересно установить взаимосвязь между нелинейными искажениями только синусоидального и равномерно распределенного сигналов при равенстве их размахов.

А. Одностороннее ограничение

$$y = \begin{cases} -cd, & x \leqslant -d, \\ cx, & x > -d, \end{cases} \text{ или } y = \begin{cases} cx, & x \leqslant d, \\ cd, & x > d. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Результаты вычислений приведены на рис. 3.6 (кривая *1*). На этом же рисунке показана зависимость нелинейных искажений сигнала с нормальным и экспоненциальным распределениями от $\Phi_с$. Из этих кривых видно, что малые искажения таких сигналов (при нормальном распределении менее 12%, при экспоненциальном распределении менее 7%) вообще нельзя оценить по результатам измерения коэффициента гармоник.

Б. Двустороннее ограничение

$$y = \begin{cases} -cd, & x < -d, \\ cx, & -d \leqslant x \leqslant d, \\ cd, & x > d. \end{cases} \qquad (3.29)$$

Взаимосвязь $\Phi_с$ и $\Phi_р$ показана на рис. 3.6 (кривая *2*) для случая равенства размахов. Результаты расчетов для других распределений не приводятся. На основе рис. 3.6 можно записать, что при идеальном ограничении как одностороннем, так и двустороннем

$$\Phi_р \approx (0{,}6 \ldots 0{,}7)\,\Phi_с. \qquad (3.30)$$

Сглаженное ограничение. Рассмотрим характеристику

$$y = \begin{cases} -B(1 - e^{\alpha x}), & x \leqslant 0, \\ B(1 - e^{-\alpha x}), & x > 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

которую можно применять, например, для аппроксимации характеристик усилителей, модуляторов.

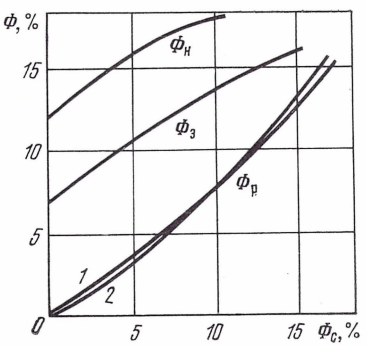


Рис. 3.6.

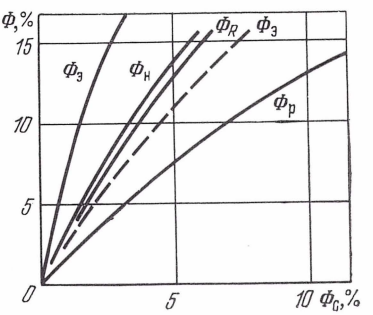


Рис. 3.7.

Результаты расчетов при одинаковой мощности сигналов показаны на рис. 3.7 сплошными линиями ($\Phi_R = \Phi_Р$). На основании этих данных можно записать

$$\Phi_н \approx (2{,}5 \ldots 2{,}8)\Phi_с;\ \Phi_р \approx (1{,}4 \ldots 1{,}5)\,\Phi_с;$$
$$\Phi_э \approx (5{,}5 \ldots 8{,}5)\,\Phi_с;\ \Phi_Р \approx (2{,}4 \ldots 2{,}7)\,\Phi_с. \tag{3.32}$$

Поскольку нелинейные искажения сигнала с экспоненциальным распределением намного больше искажений синусоиды той же мощности, на рис. 3.7 штриховой линией показана зависимость $\Phi_э$ от искажений синусоиды, мощность которой на 10 дБ больше. В этом случае

$$\Phi_э \approx (2 \ldots 2{,}5)\,\Phi_с. \tag{3.33}$$

На рис. 3.8 показана взаимосвязь $\Phi_р$ и $\Phi_с$ при равенстве размахов (кривая *1*), откуда следует

$$\Phi_р \approx 1{,}1\Phi_с. \tag{3.34}$$

$$y = C\left[e^{-\mu(x-1/\sqrt{2\mu})^2} - e^{-\mu(x+1/\sqrt{2\mu})^2}\right]. \qquad (3.35)$$

Нелинейность такого вида имеет, например, частотный детектор.

Результаты расчетов при одинаковых мощностях приведены на рис. 3.9 сплошными линиями. Приближенно можно считать

$$\Phi_н \approx 3{,}7\Phi_с;\ \Phi_р \approx 1{,}4\Phi_с;$$
$$\Phi_э \approx 12\Phi_с;\ \Phi_р \approx 4{,}2\Phi_с. \qquad (3.36)$$

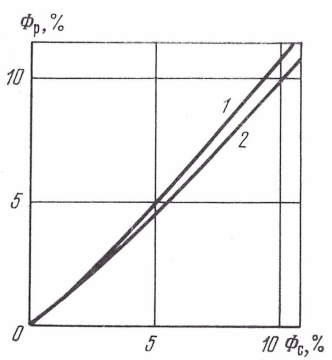


Рис. 3.8.

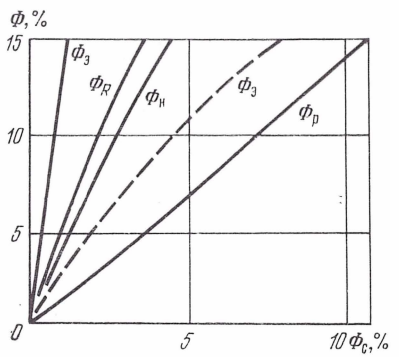


Рис. 3.9.

Штриховой линией на рис. 3.9 показана зависимость для случая, когда мощность экспоненциального сигнала на 10 дБ меньше мощности синусоиды. При этом

$$\Phi_э \approx (2 \ldots 2{,}3)\Phi_с. \qquad (3.37)$$

На рис. 3.8 (кривая *2*) отображен случай равенства размахов синусоидального и равномерно распределенного сигналов, когда

$$\Phi_р \approx \Phi_с. \qquad (3.38)$$

Приведенные в данном параграфе графики и формулы позволяют решить задачу приближенного определения оценки нелинейных искажений несинусоидальных сигналов по результатам измерения коэффициента гар-

моник, если ориентировочно известен характер нелинейности исследуемого устройства. Измерение Φ_c в этом случае заменяет измерение параметра функциональной зависимости, определяющего степень искажений ($|\alpha_2/\alpha_1|$, $|\alpha_3/\alpha_1|$, d, α или μ), знать который необходимо для расчета искажений.

Рассмотренные примеры позволяют сделать следующие выводы.

1. Результаты расчетов подтверждают значительную зависимость степени искажений от вида одномерного распределения входного сигнала. Поэтому для повышения достоверности оценок нелинейных искажений главным является не повышение точности измерения коэффициента гармоник, которая в существующей аппаратуре достаточно высока, а приближение тестового сигнала к реальному.

2. При равенстве размахов синусоидального сигнала и сигнала с равномерным распределением их искажения отличаются не более чем на 10%. При равенстве мощностей этих сигналов нелинейные искажения равномерно распределенного сигнала превышают искажения синусоиды в 1,25 ... 1,6 раза.

3. Оценка нелинейных искажений сигналов с нефинитным распределением (нормальным, релеевским или экспоненциальным) затруднена, если в исследуемом устройстве ограничение сигнала близко к идеальному.

4. Наиболее подвержен искажениям сигнал с экспоненциальным распределением. Его искажения в 5 ... 17 раз превышают искажения синусоиды одинаковой мощности. Это является следствием того, что $w_э$ относительно медленно по сравнению с другими распределениями убывает с ростом x. Поэтому для оценки искажений такого сигнала по результатам измерения коэффициента гармоник целесообразно применять гармоническое колебание, мощность которого на 10 дБ больше мощности реального сигнала. Тогда $\Phi_э$ будет в 1,7 ... 2,5 раза больше коэффициента гармоник.

Сигналы с нормальным и релеевским распределениями искажаются примерно в одинаковой степени. Это является еще одним подтверждением того, что степень нелинейных искажений зависит от скорости убывания $w(x)$ с ростом абсолютных значений аргумента. Искажения этих сигналов в 2 ... 6 раз (в основном в 2 ... 4 раза) превышает искажения синусоиды равной мощности. Поскольку нормальное распределение является одним из

наиболее распространенных, использование коэффициента гармоник для непосредственной оценки искажений реальных сигналов приводит к существенному занижению оценки искажений.

3.4. Измерение нелинейных искажений с помощью полос шума

При измерении нелинейных искажений с помощью полос шума на вход исследуемой системы (ИС) подается шумовой сигнал с равномерным спектром в полосе частот $[\omega_0-\Delta\omega;\ \omega_0+\Delta\omega]$. Структурная схема измерения приведена на рис. 3.10. Поскольку тестовый сигнал формируется из широкополосного сигнала, выдаваемого генератором шума (ГШ), с помощью полосового фильтра, его распределение вследствие нормализации шума в узкополосных системах [36] будет близко к нормальному. Степень искажений характеризуется коэффициентом $K_{ш}$

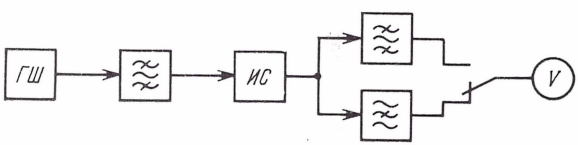


Рис. 3.10.

(1.20), представляющим отношение действующего значения выходного сигнала вне полосы частот тестового сигнала, для выделения которого используется режекторный фильтр, к действующему значению сигнала в этой полосе, выделяемому с помощью второго полосового фильтра. Иногда мощность продуктов искажений нормируется к мощности всего выходного сигнала. В этом случае из схемы на рис. 3.10 можно исключить полосовой фильтр на выходе ИС. Различие между этими оценками невелико, оно имеет тот же порядок, что и отличие между коэффициентами гармоник, задаваемыми (1.18) и (1.19).

Как уже отмечалось в § 1.4, из определения коэффициента шума видно, что в нем не учитывается мощность продуктов искажений в полосе частот тестового сигнала. Это можно объяснить сложностью как теоре-

тического, так и экспериментального разделения полезного сигнала и продуктов искажений, имеющих перекрывающиеся спектры. Использование единого метода оценки искажений упрощает эту задачу и позволяет оценить степень занижения оценки нелинейных искажений при измерении методом полос шума, сравнивая $K_{ш}$ с величиной Ф, задаваемой (3.4), в предположении, что $x(t)$ является нормальным узкополосным случайным процессом [61].

Полагая среднее значение входного сигнала равным нулю, что соответствует методу полос шума, продукты нелинейных искажений можно представить в виде

$$\xi(t)=y(t)-k_0x(t)-a_0=f[x(t)]-\frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}x(t)-\overline{y}. \quad (3.39)$$

Найдем энергетический спектр продуктов искажений $S_\xi(\omega)$. В соответствии с теоремой Винера—Хинчина [36,78]

$$S_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \quad (3.40)$$

где $K_\xi(\tau)$ — автокорреляционная функция продуктов искажений.

Учитывая нормальность $x(t)$, $K_\xi(\tau)$ можно представить в виде [36,78]

$$K_\xi(\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_iK^i{}_x(\tau), \quad (3.41)$$

где $K_x(\tau)$ — автокорреляционная функция процесса $x(t)$, а

$$\beta_i=\left[\frac{\overline{d^i\xi(t)}}{dx^i(t)}\right]^2\frac{1}{i!}\geqslant 0.$$

Нетрудно показать, что $\beta_1=0$. Действительно, с учетом того, что $\overline{x^2}=\sigma^2$,

$$\beta_1=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[f'(x)-\frac{\overline{xy}}{\sigma^2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}dx\right\}^2=$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2}dx-\frac{\overline{xy}}{\sigma^2}\right\}^2.$$

Вычисляя интеграл по частям, имеем

$$\beta_1 = \left(\frac{\overline{xy}}{\sigma^2} - \frac{\overline{xy}}{\sigma^2}\right)^2 = 0.$$

При $i \geqslant 2$

$$d^i\xi(t)/dx^i(t) = d^i f[x(t)]/dx^i(t)$$

и

$$\beta_i = \overline{[f^{(i)}(x)]^2}/i!$$

Подставляя (3.40) в (3.39), получаем

$$S_\xi(\omega) = \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i S_i(\omega), \tag{3.42}$$

где $S_i(\omega) = S_x(\omega) * S_x(\omega) * \ldots * S_x(\omega)$ представляет $(i-1)$-кратную свертку спектра входного сигнала с собою.

При прохождении сигнала $y(t)$ через режекторный фильтр неучитываемая мощность продуктов искажений

$$P_н = \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} S_i(\omega)\, d\omega. \tag{3.43}$$

При $\Delta\omega \ll \omega_i$ составляющие S_i с четными i практически не дадут вклада в окрестности ω_0. Поэтому можно считать, что

$$P_н = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{2j+1} \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} S_{2j+1}(\omega)\, d\omega. \tag{3.44}$$

Для реальных схем режекторный фильтр подавляет все составляющие выходного сигнала с частотами, близкими ω_0, что и предполагается, например, в [4]. Тогда неучитываемая мощность продуктов искажений будет больше

$$P_н = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{2j+1} \int_{\omega_0-(2j+1)\Delta\omega}^{\omega_0+(2j+1)\Delta\omega} S_{2j+1}(\omega)\, d\omega. \tag{3.45}$$

Учитывая некоррелированность продуктов искажений на неперекрывающихся интервалах частот, можно определить занижение $K_ш$ относительно Ф:

$$\Delta = Ф - K_ш = \sqrt{\frac{P_{вн\Delta\omega} + P_н}{P_{\Delta\omega}}} - \sqrt{\frac{P_{вн\Delta\omega}}{P_{\Delta\omega}}}. \tag{3.46}$$

Из (3.43) видно, что, если характеристика $f(x)=kx+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — четная функция, и тестовый сигнал достаточно узкополосен, $K_{ш}$ и Φ совпадают, поскольку в этом случае спектр полезного сигнала не перекрывается со спектром продуктов искажений и $K_{ш}$ учитывает мощность всех продуктов искажений. В остальных случаях метод полос шума в том виде, в котором он описывается в работах, например [4, 23], дает заниженную оценку. Как будет показано в примере, занижение может быть весьма значительным. Согласно (3.43) при уменьшении $\Delta\omega$ соотношение между Φ и $K_{ш}$ не изменяется. Оно также не зависит от формы $S_x(\omega)$. Важно лишь, чтобы спектр входного сигнала был равен нулю вне полосы частот $[\omega_0-\Delta\omega;\ \omega_0+\Delta\omega]$. Поэтому уменьшение полосы частот тестового сигнала не уменьшает степени занижения оценки искажений.

Пример 3.4. Пусть нелинейное устройство имеет линейно-кубическую характеристику (3.23). Тогда в соответствии с (3.24)

$$\Phi=|\alpha_3/\alpha_1|\sqrt{6}\,\sigma^2.$$

Величину $P_{\text{вн}\,\Delta\omega}$ можно рассчитать как

$$P_{\text{вн}\,\Delta\omega}=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}S_y(\omega)\,d\omega-\int_{\omega_0-3\Delta\omega}^{\omega_0+3\Delta\omega}S_y(\omega)\,d\omega\right\}.$$

Результаты такого расчета приведены в [4], где показано, что $K_{ш}=|\alpha_3/\alpha_1|\sqrt{3/2}\sigma^2$. Таким образом, $\Phi=2K_{ш}$, а неучитываемая мощность продуктов искажений в три раза больше учитываемой.

3.5. Расчет нелинейных искажений по другим критериям.

Интегральные критерии вида (1.7). Сформулированный в § 3.1 вывод о том, что степень нелинейных искажений полностью определяется одномерным распределением входного сигнала, остается справедливым для всех критериев различия сигналов вида (1.7). Действительно, в общем случае

$$F=\overline{\rho[y(t);\ \tilde{y}(t)]}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho[f(x);\ kx+a]\,w(x)\,dx, \quad (3.47)$$

и для расчета F, следовательно, достаточно знать характеристику нелинейного элемента $f(x)$ и плотность

вероятности $w(x)$. Однако объем и сложность вычислений в зависимости от вида функции потерь могут существенно возрасти. Проиллюстрируем это на примере интервального критерия.

Интервальный критерий. Пусть

$$F = 1 - P[n \leqslant y(t) - \tilde{y}(t) \leqslant m];$$
$$\Phi = F_{\text{мин}}. \qquad (3.48)$$

Здесь интервальный критерий задан в вероятностной форме. Такое задание возможно и для детерминированных сигналов, если под $w(x)$ понимать функцию, определенную в соответствии с (3.7).

Величину F удобно представить в виде

$$F = 1 - \int_n^m w_\varepsilon(\varepsilon)\, d\varepsilon, \qquad (3.49)$$

где w_ε — одномерная плотность вероятности ошибки $\varepsilon = y - \tilde{y}$. Рассматривая $\varepsilon = f(x) - kx - a$ как функцию x, $w_\varepsilon(\varepsilon)$ можно выразить через $w(x)$ [35]:

$$w_\varepsilon(\varepsilon) = \sum_i \left(w(x) \Big/ \left| \frac{df(x)}{dx} - k \right|_{x=x_i} \right). \qquad (3.50)$$

Суммирование (3.50) ведется по всем значениям x_i, являющимся решением уравнения $\varepsilon = f(x) - kx - a$. Исследование (3.50) в общем виде затруднительно, так как число слагаемых в (3.50), которое зависит от ε и от параметров k и a, переменно и границы интервалов с разным числом слагаемых определяются из решения трансцедентных уравнений. Поэтому сделаем некоторые упрощающие предположения относительно $f(x)$.

1. При $x > 0$ $|f'|$ не возрастает, а при $x < 0$ не убывает. Это условие эквивалентно предположению о единственности максимума $|f'(x)|$. Очевидно, что при этом условии любая прямая имеет не более трех пересечений с характеристикой $y = f(x)$ и, следовательно, кривая $\varepsilon(x)$ с прямой $\varepsilon = \text{const}$ также имеет не более трех пересечений (рис. 3.11).

2. Единственный максимум $|f'(x)|$ достигается при $x = 0$. Это предположение не сужает класса рассматриваемых характеристик $f(x)$, так как преобразованием

системы координат оно может быть обеспечено всегда. Тогда (3.49) с учетом (3.50) приобретает вид

$$F=\int_{-\infty}^{x_1} w(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_3} w(x)\,dx+\int_{x_4}^{x_5} w(x)\,dx+\int_{x_6}^{\infty} w(x)\,dx, \tag{3.51}$$

где x_1, x_4, x_5 — корни уравнения $f(x)-kx-a=n$; x_2, x_3 и x_6 — корни уравнения $f(x)-kx-a=m$.

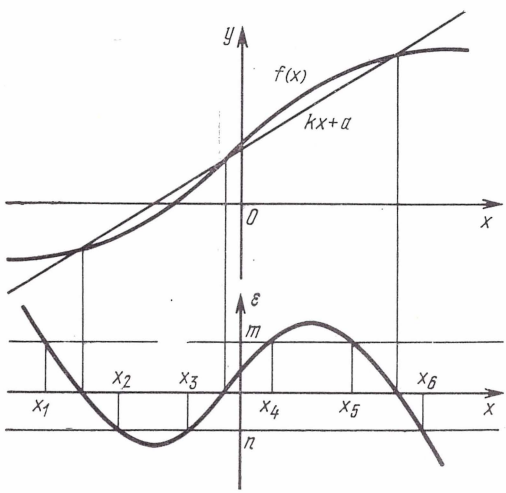


Рис. 3.11.

Учитывая, что прямые $\varepsilon=m$ и $\varepsilon=n$ могут касаться $\varepsilon(x)$ или иметь с ней только одно пересечение, рассмотрим далее частные случаи.

1. Плотность вероятности $w(x)$ имеет при $x=0$ единственный максимум. Покажем, что в этом случае значение F будет минимально, если $\varepsilon(x)$ касается прямых $\varepsilon=m$ и $\varepsilon=n$ (рис. 3.12, кривая *1*). Очевидно, что такая функция $\varepsilon(x)$ будет единственной.

Уменьшение k деформирует функцию $\varepsilon(x)$ так, как это показано на рис. 3.12 кривой *3*. Тогда изменение F определится следующим образом:

$$\Delta F \approx w(B)\,bd+w(D)\,hq-w(A)\,ef-w(C)\,pg\geqslant 0,$$

поскольку $w(B) \geqslant w(A)$, $w(D) \geqslant w(C)$ ($w(x)$ — имеет единственный максимум при $x=0$), а $bd > ef$, $hq > pg$ в силу предположения 1 об $f(x)$.

Так же можно показать, что и увеличение k приводит к увеличению F (кривая *2* на рис. 3.12).

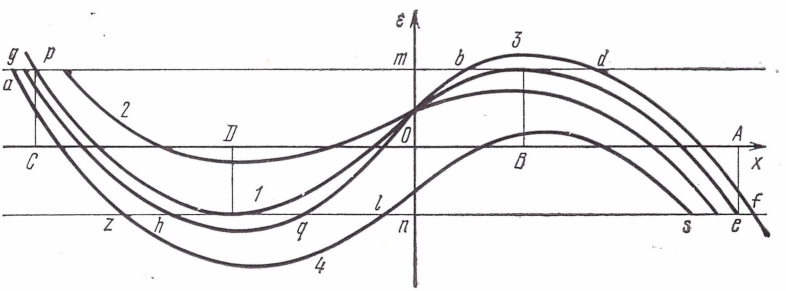


Рис. 3.12.

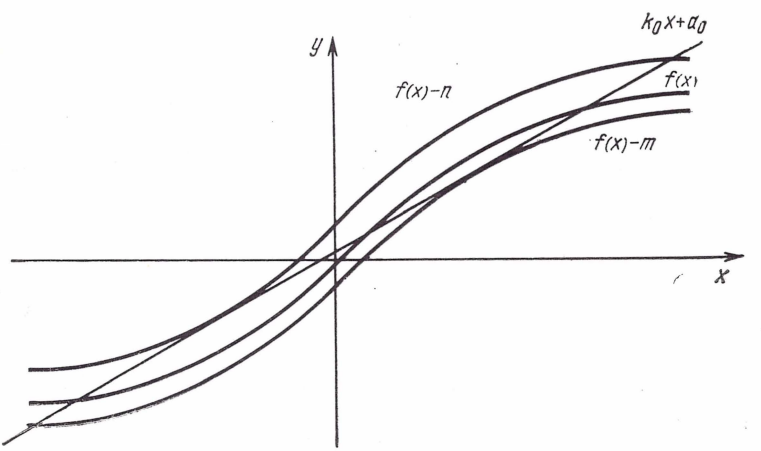


Рис. 3.13.

При увеличении a $\varepsilon(x)$ приобретает вид, показанный на рис. 3.12 кривой *4*. Тогда

$$\Delta F \approx w(D)\,zl + w(A)\,se - w(C)\,ap \geqslant 0,$$

поскольку $w(D) \geqslant w(C)$, $zl \geqslant ap$. Уменьшение a также приводит к увеличению F.

Таким образом, значение F будет минимально, если кривая $\varepsilon(x)$ касается прямых $\varepsilon = n$ и $\varepsilon = m$. Построение

прямой $\tilde{y}=k_0x+a_0$, обеспечивающей это условие, видно из рис. 3.13. Эта прямая должна касаться кривых $y=f(x)-n$ и $y=f(x)-m$. При сделанных предположениях об $f(x)$ такая прямая будет единственной.

Окончательно получаем

$$\Phi=F_{\text{мин}}=\int\limits_{-\infty}^{x_1} w(x)\,dx+\int\limits_{x_6}^{\infty} w(x)\,dx. \qquad (3.52)$$

Согласно (3.52) $\Phi=0$, если $x_1\leqslant x(t)\leqslant x_6$. При этом, если выполняются оба неравенства, Φ остается равным нулю в некоторой области изменения k_0 и a_0. В этом случае их целесообразно выбрать такими, чтобы модули экстремумов $\varepsilon(x)$ были минимальными, поскольку тогда можно обеспечить $\Phi=0$, задав меньшие $|n|$ и m. В частности, при этом необходимо взять максимально возможный $|k_0|$.

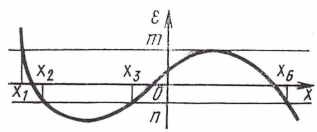


Рис. 3.14.

В заключение отметим, что k_0 и a_0 не зависят от вида $w(x)$, а определяются только $f(x)$, n и m.

2. Плотность вероятности $w(x)$ имеет единственный максимум при $x_0>0$, причем $|f(x_0)|\gg|n|$, m. В этом случае значение F будет минимально, если $\varepsilon(x)$ касается прямой $\varepsilon=m$ в окрестности точки x_0. Из рис. 3.14 видно, что, если максимум $w(x)$ лежит на интервале $[x_3; x_6]$, изменения k и a приводят к увеличению F. Доказательство этого аналогично предыдущему.

Уравнение прямой, касающейся кривой $y=f(x)-m$,

$$y=f'(\tilde{x})(x-\tilde{x})+f(\tilde{x})-m$$

содержит параметр $\tilde{x}$, который должен быть определен из условия минимума F. Поскольку $x_1\approx x_2$, можно пренебречь значением интеграла от $w(x)$ на интервале $[x_1; x_2]$ и считать

$$F=\int\limits_{-\infty}^{x_3} w(x)\,dx+\int\limits_{x_6}^{\infty} w(x)\,dx.$$

Если $|f(x_0)|\approx m$, то пренебрегать значением упомянутого интеграла нельзя и следует использовать формулу (3.51), в которой будет отсутствовать третье слагаемое.

3. Плотность вероятности $w(x)$ имеет единственный минимум при $x_0<0$. Этот случай аналогичен рассмотренному при замене m на n.

В остальных случаях, особенно когда $w(x)$ имеет несколько максимумов, необходимо исследовать все возможные варианты: все корни $x_1, \ldots, x_6$ существуют и разные, совпадают x_2 и x_3, x_4 и x_5 и т. д.

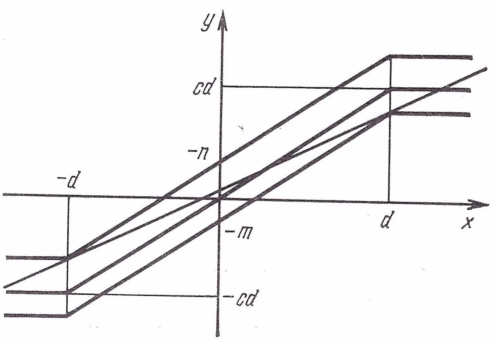


Рис. 3.15.

Прежде чем переходить к рассмотрению примера, отметим следующее. Получение оценки искажений по интервальному критерию отличия сигналов приводит в общем случае к трансцедентным уравнениям, которые могут быть решены только приближенно, например графически. Графическое определение степени искажений сводится к такому размещению прямой $\tilde{y}=k_0x+a_0$, при котором вероятность пребывания $x(t)$ на интервалах, расположенных под отрезками этой прямой, заключенными между кривыми $y=f(x)-n$ и $y=f(x)-m$ максимальна. Графическая интерпретация полезна и в тех случаях, когда возможно аналитическое решение.

Пример 3.5. Определить искажения нормального сигнала с нулевым средним при прохождении его через идеальный двусторонний ограничитель (3.29), если критерий отличия сигналов интервальный.

Условия примера соответствуют случаю, когда $w(x)$ имеет единственный максимум при $x=0$. Поэтому прямая $\tilde{y}=k_0x+a_0$ должна касаться кривых $y=f(x)-n$ и $y=f(x)-m$ (рис. 3.15). Вычисляя, получаем

$$k_0=[2cd-(m-n)]/2d\approx c;\quad a_0=(m+n)/2,$$

$$\Phi=2J\left(-\frac{d}{\sigma}\,\frac{2cd+(m-n)}{2cd-(m-n)}\right),$$

где

$$J(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\eta^2/2}\,d\eta$$

— интеграл вероятности.

Рассмотрение интервального критерия показывает, что при функции потерь ρ, отличной от квадратичной, характер вычислений значительно усложняется, особенно из-за недифференцируемости $\rho(\varepsilon)$.

Критерий равномерного приближения, который формально и может быть представлен в интегральной форме (1.7), более удобно записать в виде

$$F=\max_t|\varepsilon(t)|=\max_x|f(x)-kx-a|. \qquad (3.53)$$

До сих пор при рассмотрении сигналов с нефинитными распределениями (например, нормальным, экспоненциальным или релеевским) не принималось во внимание, что такие сигналы, хотя и с малыми вероятностями, могут принимать значения сколь угодно большие по модулю. Реальные сигналы всегда ограничены по модулю. Однако отличие нефинитных распределений от физически возможных в подавляющем большинстве расчетов приводит к столь незначительным расхождениям в результатах, что ими можно пренебречь. Поэтому, в частности, чрезвычайно широко используется нормальное распределение, хотя очевидно, что реальные сигналы не могут иметь точно такое распределение. Здесь останавливаемся на этом факте потому, что при критерии равномерного приближения пренебрегать этим различием нельзя.

Действительно, все реальные характеристики $f(x)$ являются ограниченными по модулю функциями. Поэтому, если допустить, что абсолютные значения входного сигнала могут быть сколь угодно большими, значения выходного сигнала все равно не будут превышать некоторого значения и $F=\max|\varepsilon(t)|=\infty$. То, что большие значения $|\varepsilon|$ маловероятны, не учитывается в критерии равномерного приближения в отличие от других критериев (например, среднеквадратичного или интервального). Поэтому для получения оценок искажений, имеющих практический смысл и отражающих реально имеющиеся физические ограничения, при применении критерия равномерного приближения необходимо сра-

зу же оговорить, что входной сигнал находится на некотором интервале $[x_1; x_2]$ и его одномерная плотность вероятности равна нулю вне этого интервала. Тогда нетрудно увидеть, что значение F, определяемое (3.53), и соответственно $F_{\text{мин}}$ и Φ не будут зависеть от вида распределения входного сигнала. Оценку искажений в этом случае можно задать согласно (1.23) или в несколько ином виде

$$\Phi = F_{\text{мин}}/k_0\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right); \qquad (3.54)$$

что обеспечивает полную независимость Φ от формы $w(x)$. При симметричности w относительно математического ожидания (3.54) совпадает с (1.23).

Независимость оценки нелинейных искажений по критерию равномерного приближения от вида распределения входного сигнала является определенным достоинством этого критерия и позволяет выразить оценку искажений любого сигнала только через характеристики системы. Поэтому способ оценки нелинейности с помощью $K_{\text{имп}}$ (1.24), предложенный в [25], можно рассматривать как способ оценки нелинейных искажений любого сигнала. При этом, как уже отмечалось в § 1.4, использование (3.53) устраняет неопределенность в разделении $f(x)$ на линейный и нелинейный компоненты.

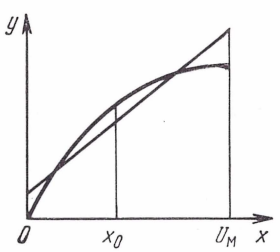


Рис. 3.16.

В § 1.2 отмечалось, что значение критерия равномерного приближения можно использовать для оценки сверху значений других критериев. Применительно к нелинейным искажениям эта оценка оказывается почти не зависящей от свойств передаваемого сигнала.

Пример 3.6. Определить искажения сигнала $x(t)$, значения которого не выходят за интервал $[0, U_м]$ при воздействии его на элемент с линейно-квадратичной характеристикой (3.18), при оценке различия сигналов по критерию равномерного приближения.

В этом случае имеем $\varepsilon(x) = \alpha_2 x^2 + (\alpha_1 - k)x + a$. Максимум $|\varepsilon(x)|$ может достигаться или в точке $x_0 = -(\alpha_1 - k)/2\alpha_2$, в которой производная $d\varepsilon/dx$ обращается в нуль, или на границах интервала:

$$F = \max\left\{|a|;\ \left|a - \frac{(\alpha_1 - k)^2}{4\alpha_2}\right|;\ |\alpha_2 U_м^2 + (\alpha_1 - k)U_м - a|\right\}.$$

Нетрудно видеть, что значение F будет минимально (рис. 3.16), если знаки ε в точке x_0 и на границах интервала будут различны.

При этом минимум будет достигаться [10] при $\varepsilon(0)=-\varepsilon(x_0)=\varepsilon(U_м)$. Из этого условия получаем

$$k_0=\alpha_1+\alpha_2U_м;\ a_0=-(\alpha_1-k_0)^2/8\alpha_2=\alpha_2U^2_м/8;$$

$$F_{мин}=|a_0|=|\alpha_2|U^2_м/8;$$

$$\Phi=\frac{|\alpha_2|U^2_м}{4|\alpha_1U_м+\alpha_2U^2_м|}\approx\frac{1}{4}\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|U_м.$$

При оценке искажений по среднеквадратичному критерию

$$F_{мин}\leqslant[\alpha_2U^2_м/8]^2;$$

$$\Phi\leqslant\frac{1}{8}\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|\frac{U^2_м}{\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}}.$$

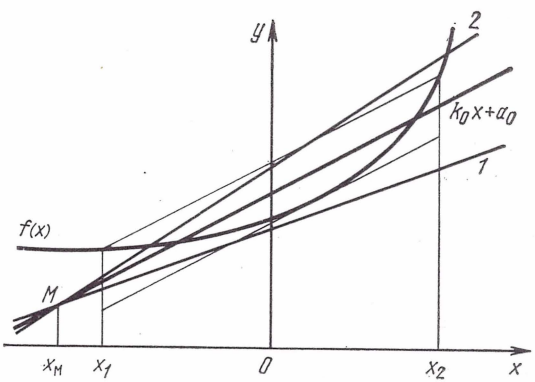


Рис. 3.17.

Определим степень завышения этой оценки при равномерном распределении x на интервале $[0; U_м]$. В этом случае в формуле (3.15) $b=U_м$ и из (3.19) имеем $\Phi_р=|\alpha_2/\alpha_1|U_м/\sqrt{15}$. Оценка сверху дает значение $\Phi_р\leqslant\sqrt{3}|\alpha_2/\alpha_1|U_м/4$, которое примерно в 1,7 раза больше действительного значения искажений.

Результаты примера 3.6 можно сформулировать следующим образом. Прямая $\tilde{y}=k_0x+a_0$ проходит посредине между прямыми, одна из которых соединяет точки $[x_1; f(x_1)]$, $[x_2; f(x_2)]$, а другая параллельна первой и касается кривой $y=f(x)$. Этот результат можно обобщить для любых выпуклых или вогнутых характеристик, т. е. характеристик с монотонной первой производной. Действительно, из рис. 3.17 видно, что при $k=k_0$ изменение a увеличивает или $|f(x_0)-\tilde{y}(x_0)|$, или $|f(x_1)-$

$-\tilde{y}(x_1)|=|f(x_2)-\tilde{y}(x_2)|$. Совместное изменение k и a эквивалентно повороту прямой k_0x+a_0 вокруг некоторой точки M. Если абсцисса точки M меньше x_1, то поворот прямой в отрицательном направлении (прямая *1*) приводит к увеличению $|f(x_1)-\tilde{y}(x_1)|$ и $|f(x_2)-\tilde{y}(x_2)|$. Поворот прямой вокруг точки M в положительном направлении (прямая *2*) приводит к увеличению $|f(x_0)-\tilde{y}(x_0)|$. Аналогичные результаты можно получить, если $x_M>x_2$ или $x_1\leqslant x_M\leqslant x_2$.

Таким образом, для характеристик с монотонными производными имеем

$$k_0=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

$$a_0=\frac{1}{2}\left[f(x_0)-x_0\,\frac{x_2f(x_2)-x_1f(x_1)}{x_2-x_1}\right]; \qquad (3.55)$$

$$F_{\text{мин}}=|a_0|,$$

где x_0 определяется из условия $f'(x_0)=k_0$.

Максимальное значение критерия равномерного приближения, дающего оценку сверху для всех интегральных критериев, в свою очередь, можно оценить, зная максимальную неравномерность первой производной характеристики

$$K_{\text{пр}}=\frac{\max(dy/dx)-\min(dy/dx)}{\max(dy/dx)+\min(dy/dx)}.$$

Введем обозначения $k_1=\max(dy/dx)$ и $k_2=\min(dy/dx)$. Тогда F будет максимально, если

$$y=\begin{cases}c+k_1x, & x_1\leqslant x\leqslant x_0;\\ c+k_1x_0+k_2(x-x_0), & x_0<x\leqslant x_2,\end{cases}$$

или

$$y=\begin{cases}c+k_2x, & x_1\leqslant x\leqslant x_0,\\ c+k_2x_0+k_1(x-x_0), & x_0<x\leqslant x_2.\end{cases}$$

В первом случае характеристика $f(x)$ будет выпуклой, а во втором — вогнутой. Поэтому в соответствии с (3.55) в первом случае

$$F_{\text{мин}}=\frac{1}{2}\left|k_1(x_0-x_1)-\frac{x_0[k_1(x_0-x_1)-k_2(x_2-x_0)]}{x_2-x_1}\right|,$$

а во втором —

$$F_{\text{мин}}=\frac{1}{2}\left|k_2(x_0-x_1)-\frac{x_0[k_2(x_0-x_1)-k_1(x_2-x_0)]}{x_2-x_1}\right|.$$

В обоих случаях $F_{\text{мин}}$ имеет наибольшее значение при $x_0 = (x_1 + x_2)/2$. Тогда

$$F_{\text{мин}} = [(k_1 - k_2)/8]\,[(x_2 - x_1)/2];$$
$$\Phi = K_{\text{пр}}/8.$$

Используя полученное соотношение и свойства критерия равномерного приближения по $K_{\text{пр}}$ можно оценить степень нелинейных искажений, исходя также из других критериев, аналогично тому, как это сделано в [28] для коэффициента гармоник.

Среднеквадратичный критерий различия сигналов с весовой функцией в частотной области. Зададим F и Φ следующим образом:

$$F = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_\varepsilon(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega;$$
$$\Phi = \sqrt{F_{\text{мин}}\Big/\frac{k_0^2}{\pi}\int_0^\infty S_x(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega}, \qquad (3.56)$$

где S_ε — энергетический спектр ошибки $\varepsilon(t)$; $Q(\omega)$ — заданная неотрицательная функция.

Из задания F видно, что мощность различных компонентов $\varepsilon(t)$ учитывается в различной степени в зависимости от их частот. Такое задание критерия отличия сигналов целесообразно, например, когда сигнал с нелинейного безынерционного элемента поступает на окончное линейное устройство с характеристикой $K(\omega)$ и качество системы в целом характеризуется по среднеквадратичному критерию. В этом случае $Q(\omega) = K^2(\omega)$.

При определении F в соответствии с (3.56) необходимо определить энергетический спектр сигнала $\varepsilon(t) = f[x(t)] - kx(t) - a$, являющегося результатом нелинейного безынерционного преобразования процесса $x(t)$. Решение этой задачи в общем случае возможно, если $x(t)$ — нормальный или почти нормальный случайный процесс [36]. В первом случае можно использовать, например, формулу (3.42), которая примет вид

$$S_\varepsilon(\omega) = 2\pi(\bar{y} - a)^2\,\delta(\omega) + \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i S_i(\omega),$$

где $S_i(\omega)$, как и ранее $(i-1)$-кратная свертка спектра входного сигнала с собою,

$$\beta_1 = [\overline{f'(x)} - k]^2; \quad \beta_i = [\overline{f^{(i)}(x)}]^2/i! \quad i \geqslant 2.$$

Тогда, полагая для краткости $\bar{x} = 0$, получаем

$$F = (\bar{y} - a)^2 Q(0) + \frac{\beta_1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) Q(\omega)\, d\omega +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i \int_0^\infty S_i(\omega)\, Q(\omega)\, d\omega.$$

Поскольку от a зависит только первое слагаемое, а от k только второе и оба эти слагаемые неотрицательные, то

$$F_{\text{мин}} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i \int_0^\infty S_i(\omega)\, Q(\omega)\, d\omega \qquad (3.57)$$

при $a_0 = \bar{y}$; $k_0 = \overline{f'(x)} = \overline{xy}/\overline{x^2}$.

Полученные эквивалентный коэффициент передачи и изменение постоянной составляющей не зависят от весовой функции $Q(\omega)$ и остаются такими же, как при среднеквадратичном критерии, когда $Q(\omega) \equiv 1$.

Представление $S_\varepsilon(\omega)$ в виде ряда по $S_i(\omega)$ было удобным при получении выражений для a_0 и k_0. При практических расчетах, если можно получить в замкнутом виде выражение для спектра $S_y(\omega)$ сигнала $y(t)$, удобно использовать формулу

$$F_{\text{мин}} = \frac{1}{\pi} \int_{+0}^{\infty} [S_y(\omega) - k_0^2 S_x(\omega)]\, Q(\omega)\, d\omega, \qquad (3.58)$$

которая следует из соотношения

$$S_y(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} [\overline{f^{(i)}(x)}]^2 S_i(\omega) \frac{d\omega}{i!} = 2\pi \bar{y}^2 \delta(\omega) +$$

$$+ k_0^2 S_x(\omega) + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i S_i(\omega).$$

Таким образом, для нормальных $x(t)$ оценка нелинейных искажений по критерию (3.56) зависит только от энергетического спектра.

Пример 3.7. Определим нелинейные искажения нормального случайного стационарного процесса с энергетическим спектром $S(\omega) = 2T\sigma^2/(1+T^2\omega^2)$ при воздействии его на элемент с линейно-кубической характеристикой (3.23). Весовая функция $Q(\omega) = 1/(1+T_0^2\omega^2)$, $T_0 \ll T$, что соответствует оконечному каскаду на рис. 1.1 в виде апериодического звена первого порядка.

В соответствии с (3.57) имеем

$$k_0 = \alpha_1 + 3\alpha_3\sigma^2 \approx \alpha_1;$$

$$\beta_2 = [\overline{f''(x)}]^2/2! = (6\alpha_3\bar{x})^2/2! = 0;$$

$$\beta_3 = [\overline{f'''(x)}]^2/3! = (6\alpha_3)^2/6 = 6\alpha_3^2;$$

$$\beta_i = 0, \quad i \geqslant 4;$$

$$F_{\text{мин}} = \frac{\beta_3}{\pi}\int_0^\infty S_3(\omega)\, Q(\omega)\, d\omega;$$

$$S_3(\omega) = \frac{2T\sigma^2}{1+T^2\omega^2} * \frac{2T\sigma^2}{1+T^2\omega^2} * \frac{2T\sigma^2}{1+T^2\omega^2} = \frac{10T\sigma^6}{1+(T\omega/3)^2};$$

$$F_{\text{мин}} = 6\alpha_3^2\sigma^2 \Big/ \left(\frac{3T_0}{T}+1\right);$$

$$\Phi = \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|\sigma^2 \sqrt{6\left(\frac{T_0}{T}+1\right)\Big/\left(\frac{3T_0}{T}+1\right)} \approx \left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|\sigma^2\sqrt{6(1-2T_0/T)}.$$

При $T_0 = 0$, когда $Q(\omega) \equiv 1$, критерий (3.55) переходит в обычный среднеквадратичный критерий и полученный результат для Φ совпадает с (3.24).

Решение в общем виде возможно также, если $x(t)$ есть результат известного (например, нелинейного безынерционного) преобразования нормального процесса $\eta(t)$. В этом случае

$$x(t) = \varphi[\eta(t)]; \quad y(t) = f[x(t)] = \psi[\eta(t)],$$

а ошибка $\varepsilon(t)$ по-прежнему есть результат нелинейного безынерционного преобразования нормального случайного процесса

$$\varepsilon(t) = \psi[\eta(t)] - k\varphi[\eta(t)] - a.$$

Тогда F можно представить в виде

$$F=(\bar{y}-k_0\bar{x}-a_0)^2Q(0)+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{[\psi^{(i)}(\eta)}-$$

$$-k_0\overline{\varphi^{(i)}(\eta)]^2}\int_0^{\infty}\frac{S_i(\omega)\,Q(\omega)\,d(\omega)}{i!}.$$

В этом случае $S_i(\omega)$ получается в результате $(i-1)$-кратного свертывания спектра $S_\eta(\omega)$ процесса $\eta(t)$.

Значение F будет минимальным при

$$a_0=\bar{y}-k_0\bar{x};$$

$$k_0=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\psi^{(i)}(\eta)}\;\overline{\varphi^{(i)}(\eta)}\int_0^{\infty}S_i(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega/i!}{\sum_{i=1}^{\infty}\overline{[\varphi^{(i)}(\eta)]^2}\int_0^{\infty}S_i(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega/i!}=$$

$$=\int_0^{\infty}S_{xy}(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega\Big/\int_0^{\infty}S_x(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega,$$

где $S_x(\omega)$, как и ранее, спектр сигнала $x(t)$; $S_{xy}(\omega)$ — взаимный энергетический спектр сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Подставляя полученные k_0 и a_0 в выражение для F, а полученное значение $F_{\text{мин}}$ в (3.56), после аналогичных преобразований получаем

$$\Phi=\sqrt{\frac{\int_0^{\infty}S_x(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega\int_0^{\infty}S_y(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega}{\left[\int_0^{\infty}S_{xy}(\omega)\,Q(\omega)\,d\omega\right]^2}-1}. \quad (3.59)$$

Энергетические спектры сигналов S_x и S_y и их взаимный спектр S_{xy} можно выразить через энергетический спектр процесса $\eta(t)$ и функции φ и ψ или при необходимости через S_x и f. Для установления этих зависимостей применим любой из методов, изложенных, например, в [16, 36, 78].

Наряду с рассмотренными критериями, аргументами которых являются непосредственно сравниваемые сиг-

налы, нелинейные искажения можно оценивать по степени отличия одномерных распределений выходного и входного сигналов. Такой подход к оценке нелинейных искажений рассмотрен в работе [7], в которой для сравнения одномерных плотностей вероятности используются среднемодульный, среднеквадратичный и энтропийный критерии и приводятся примеры расчета по последнему критерию. Использование отличия одномерных плотностей вероятности для исследования безынерционных систем вполне оправдано, поскольку одномерные законы описывают амплитудную структуру сигнала, которая подвержена искажениям при нелинейном безынерционном преобразовании. Однако такая оценка нелинейных искажений в отличие от других не имеет достаточно четкой физической интерпретации.

3.6. Тестовый сигнал для измерения нелинейных искажений в широкополосных системах

Из результатов § 3.1 и 3.5 видно, что степень нелинейных искажений в нелинейном безынерционном устройстве зависит только от одномерной плотности вероятности входного сигнала. В соответствии с этим нетрудно определить вид сигнала, не подверженного нелинейным искажениям. Действительно, пусть

$$w(x) = p\delta(x - x_1) + (1 - p)\,\delta(x - x_2),$$

где p — любое число, лежащее на интервале $[0; 1]$; $\delta(\cdot)$, как и ранее, импульсная функция или δ-функция.

В этом случае входной сигнал может принимать только значения x_1 или x_2, некоторым образом переходя от одного значения к другому (рис. 3.18). Тогда, взяв

$$a_0 = \frac{x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$k_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

получим, что $\xi(t) \equiv 0$, т. е. независимо от вида критерия F продукты искажений отсутствуют и $\Phi = 0$.

Чтобы степень искажений сигнала соответствовала степени искажений реального сигнала, необходимо обес-

печить совпадение их одномерных распределений. Способы формирования случайных или почти случайных процессов с заданными одномерными плотностями вероятности рассмотрены, например, в [5, 21]. Наиболее просто получить процесс $x(t)$ с требуемым одномерным распределением $w(x)$, подвергнув нелинейному безынерционному преобразованию процесс $\eta(t)$ с некоторым распределением $w_\eta(\eta)$. Вид преобразования $x=\psi(\eta)$ можно найти из уравнения

$$w_\eta(\eta)\,d\eta = w(x)\,dx. \tag{3.60}$$

Формула (3.60) записана в предположении, что функция $\psi(\eta)$ монотонно возрастает и, следовательно, взаимнооднозначна.

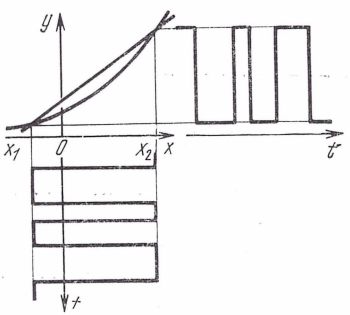


Рис. 3.18.

В качестве процесса $\eta(t)$ обычно берут процессы с нормальным или равномерным распределением. Это объясняется тем, что методы их формирования достаточно просты. Процессы первого типа генерируются многими физическими датчиками. Кроме того, нормальный случайный процесс можно получить, пропуская широкополосный шум с любым распределением через узкополосную линейную систему. Равномерное распределение имеет периодический пилообразный сигнал. При этом, чтобы сигнал $x(t)$ не имел крутых фронта и спада, был наименее широкополосным, время обратного хода должно быть соизмеримым со временем прямого хода. В принципе, наилучшим будет сигнал, у которого длительности падающего и нарастающего участков равны между собой. Следует также отметить, что числа с равномерным распределением наиболее просто генерируются цифровыми устройствами.

Получить сигналы с равномерным распределением несколько проще, чем с нормальным. Однако в этом случае функция $\psi(\eta)$, получаемая в соответствии с (3.60) будет более крутой, чем при преобразовании нормального процесса. Примеры функций $\psi(\eta)$ для нескольких распределений приведены в табл. 4. Функция

$\psi_р(\eta)$ соответствует преобразованию процесса $\eta(t)$ с равномерным распределением, а функция $\psi_н(\eta)$ — преобразованию процесса с нормальным распределением. Средние значения, соответствующие распределениям, фигурирующим в таблице, положены равными нулю. Функциональный вид распределений задается формулами (3.14)—(3.17).

Таблица 4

Распределение $w(x)$	$\psi_р(\eta)$, $-\frac{b}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{b}{2}$	$\psi_н(\eta)$
Нормальное (3.14)	$\sigma J^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{b}\right)^*$	η
Равномерное (3.15), $-\frac{b}{2} \leqslant \eta \leqslant \frac{b}{2}$	η	$b\left[J\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\right]$
Релеевское (3.16), $-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant x$	$\rho\left\{\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{b}\right)}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$	$\rho\left\{\sqrt{2\ln\left[1-J\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)\right]}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$
Экспоненциальное (3.17), $-m \leqslant x$	$-m\left[\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{b}\right)+1\right]$	$-m\left\{\ln\left[1-J\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)\right]+1\right\}$

*J^{-1} — функция, обратная интегралу вероятности.

Если распределение $w(x)$ близко к арккосинусному (3.9), то в качестве тестового сигнала следует взять гармоническое колебание. Этот же сигнал можно было бы использовать в качестве исходного процесса $\eta(t)$ для формирования тестового сигнала с произвольным распределением. Однако из-за финитности его распределения получаемые функции $\psi(\eta)$ будут столь же крутыми, как и для равномерного распределения $\eta(t)$, а вид функций $\psi(\eta)$ будет еще сложнее.

Структурная схема измерения искажений приведена на рис. 3.19. Она практически совпадает со структурной схемой измерителя суммарных искажений (рис. 2.2), отличаясь от нее только отсутствием линии задержки.

Предположение о безынерционности для реальной системы может выполняться лишь приближенно. Поэтому спектр сигнала $x(t)$ должен находиться в диапазоне частот, для которого предположение об отсутствии линейных искажений выполняется достаточно строго. Наиболее просто обеспечить это условие, если исследуемая система пропускает постоянную составляющую, так как в этом случае сигнал $x(t)$ можно взять сколь угодно медленным, и это обеспечит сколь угодно малые линейные искажения. Если исследуемая система имеет $K(0)=0$, но достаточно широкополосна, что типично для видеотрактов, то полосу частот нормального сигнала или период пилообразного $\eta(t)$ нужно выбирать из условия минимума линейных искажений $x(t)$ в исследуемой системе, оцениваемых по тому же критерию, что и измеряемые нелинейные искажения. Если этот минимум оказывается одного порядка с измеряемыми искажениями, то структурная схема на рис. 3.18 не применима и необходимо переходить к схемам, рассматриваемым в § 3.7.

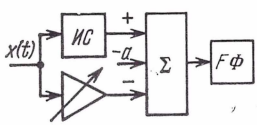


Рис. 3.19.

При расчете суммарной погрешности измерения в соответствии с (2.12) линейные искажения тестового сигнала можно отнести к $\Phi_{вх}$. Это можно сделать, условно представив исследуемую систему в виде каскадно соединенных нелинейного безынерционного звена и линейного каскада и объединив последний с входным каскадом измерителя искажений. При этом из-за малости нелинейных искажений несущественно, отражает такое разбиение реальную структуру системы или нет.

Все сказанное о линейных искажениях применимо и к учету влияния внутреннего шума на достоверность результата измерения нелинейных искажений. Правда, в этом случае в отличие от продуктов линейных искажений внутренний шум, как правило, независим от сигнала и, следовательно, от продуктов его искажений. Это позволяет довольно просто скорректировать окончательный результат, зная, например, действующее значение шума на выходе системы.

Измерение нелинейных искажений существенно упрощается, если сигналы сравнивают по критерию равномерного приближения. В этом случае в качестве тестового сигнала можно использовать любой сигнал, лучше периодический, например гармонический или пилообразный, размах которого совпадает с размахом реального сигнала. Устройство для измерения F и Φ представляет собою пиковый вольтметр с двухполупериодным выпрямителем на входе. При этом, как и во всех случаях, F минимизируют изменением коэффициента передачи k и постоянной составляющей a.

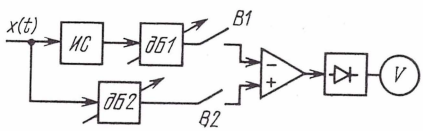


Рис. 3.20.

Дальнейшее упрощение возможно, если заведомо известно, что исследуемая система имеет характеристику с монотонной производной. В этом случае (рис. 3.20) с помощью аттенюаторов при поочередно замыкаемых ключах $B1$ и $B2$ уравнивают и нормируют размахи сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Величина искажений оказывается равной половине показаний вольтметра при одновременно замкнутых ключах. Минимизация в процессе измерений в этом случае не нужна.

3.7. Тестовый сигнал для измерения нелинейных искажений в системах с ограниченной полосой пропускания

Если исследуемая система недостаточно широкополосна, то для устранения влияния линейных искажений на результат измерения нелинейных искажений, необходимо использовать узкополосный тестовый сигнал, который практически не подвержен линейным искажениям. В этом случае предъявляют требования как к одномерному распределению тестового сигнала, так и к его спектрально-корреляционным свойствам.

Известен только один способ формирования случайного процесса с заданной одномерной плотностью вероятности и с заданной автокорреляционной функцией — нелинейное безынерционное преобразование случайного процесса [5]. Вид нелинейного преобразования выбирают в соответствии с (3.60), чем обеспечивают требуемое одномерное распределение. Корреляционную функцию преобразованного процесса $K_x(\tau)$ выражают через корреляционную функцию преобразуемого процесса $K_\eta(\tau)$

$$K_x(\tau) = H[K_\eta(\tau)],$$

где вид функции $H(\cdot)$ зависит только от вида функции $\psi(\eta)$. Подставляя в это соотношение требуемую K_x, можно определить, какая K_η обеспечивает это условие. Однако не всегда полученная таким образом $K_\eta(\tau)$ является физически реализуемой автокорреляционной функцией. Чтобы $K_\eta(\tau)$ была корреляционной функцией некоторого процесса $\eta(t)$, она должна быть положительно определенной [35, 74], т. е. преобразование Фурье от нее, являющееся энергетическим спектром, для всех частот должно быть неотрицательным. Если рассчитывать $K_\eta(\tau)$ для $K_x(\tau)$, соответствующих узкополосным процессам $x(t)$, то всегда будут получаться функции, не являющиеся положительно определенными.

Невозможность получения таким способом узкополосного процесса с распределением, отличным от нормального, можно проиллюстрировать следующим образом. Из (3.42) видно, что спектр результата нелинейного безынерционного преобразования нормального процесса получается суммированием с неотрицательными коэффициентами результатов многократного свертывания спектра преобразуемого процесса. В результате свертки спектр может только расшириться. Поэтому результат нелинейного безынерционного преобразования будет более широкополосным, чем преобразуемый нормальный процесс.

Для формирования тестового сигнала с симметричным распределением можно использовать амплитудную модуляцию синусоидального сигнала [56], тогда тестовый сигнал будет иметь вид

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi), \quad A(t) \geqslant 0, \qquad (3.61)$$

где $A(t)$ — модулирующая функция, наивысшая частота которой намного меньше частоты несущей ω_0; φ — произвольная начальная фаза.

Распределение такого сигнала $w(x)$ связано с распределением огибающей $w_A(A)$ следующим образом:

$$w(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty w_A(x \operatorname{ch} A)\, dA. \tag{3.62}$$

Отсюда [69] для обеспечения требуемой $w(x)$ необходимо, чтобы плотность вероятности огибающей имела вид

$$w_A(A) = A \int_0^\infty \theta_x(u)\, J_0(Au)\, u\, du, \tag{3.63}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а

$$\theta_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} w(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, w(x)\, dx$$

— характеристическая функция $x(t)$.

Таблица 5

$w(x)$	$w_A(A)$, $A \geqslant 0$	$A(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$
1. $1/\pi \sqrt{A_0^2 - x^2}$, $\lvert x \rvert \leqslant A_0$	$\delta(A - A_0)$	A_0
2. $\frac{1}{2\pi A_0} \times \times \ln \frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - x^2}}{A_0 - \sqrt{A_0^2 - x^2}}$, $\lvert x \rvert \leqslant A_0$	$\frac{1}{A_0}$, $A \leqslant A_0$	$\frac{tA_0}{T}$
3. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$	$\frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2}$	$\sigma \sqrt{-2 \ln \left(1 - \frac{t}{T}\right)}$
4. $\frac{1}{2A_0}$, $\lvert x \rvert \leqslant A_0$	$\frac{A}{A_0 \sqrt{A_0^2 - A^2}}$, $A \leqslant A_0$	$A_0 \sqrt{1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2}$

Преобразование вида (3.63) является преобразованием Ханкеля, описание свойств которого и таблицы имеются, например, в [17].

Для формирования $A(t)$ можно использовать в соответствии с (3.60) нелинейное безынерционное преоб-

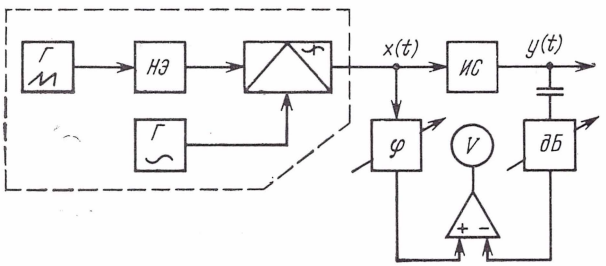


Рис. 3.21.

разование нормального или пилообразного сигнала, частота которого намного меньше частоты модулируемого синусоидального сигнала. В табл. 5 для ряда распределений $w(x)$ приведен вид распределений w_A и

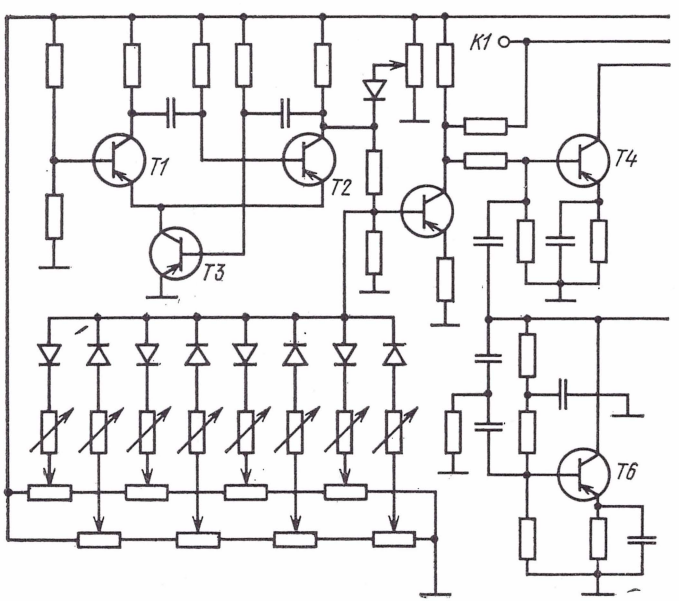
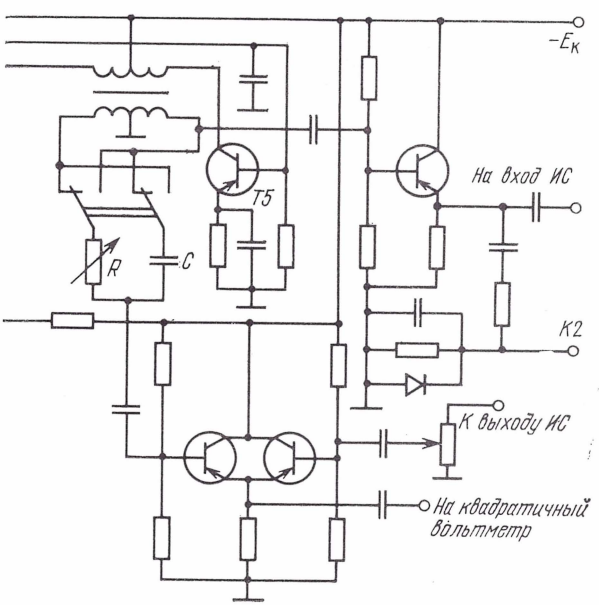


Рис. 3.22.

модулирующих функций $A(t)$ при формировании их из пилообразного сигнала с длительностью прямого хода T.

Структурная схема измерения искажений с помощью такого тестового сигнала при среднеквадратичном критерии приведена на рис. 3.21. Нелинейный элемент (НЭ) обеспечивает требуемое распределение модулирующего сигнала. При исследовании нелинейных искажений предполагалось, что система безынерционна, но тем не менее при измерении необходимо учитывать фазовые сдвиги выходного сигнала относительно входного. Для их компенсации применен фазовращатель, выполняющий роль задерживающего устройства. Во всем остальном эта схема аналогична структурной схеме на рис. 2.2.

Структурная схема на рис. 3.21 при постоянном модулирующем сигнале $A(t)$ совпадает со структурной схемой измерителя коэффициента гармоник [27], в котором первая гармоника выходного сигнала не подавляется с помощью режекторного фильтра, а компенсируется с помощью тестового сигнала. Это совпадение — следствие того, что при среднеквадратичном критерии и синусоидальном входном сигнале единый метод пере-



ходит в метод одного тона. Поэтому измеритель нелинейных искажений с помощью тестового сигнала с симметричным распределением можно рассматривать как обобщение измерителя коэффициента гармоник на более широкий класс сигналов.

Тестовый сигнал (3.61) аналогичен тестовому сигналу при измерении нелинейных искажений с помощью полос шума, а при нормальном распределении $x(t)$ совпадает с ним. Однако, как уже отмечалось, при измерении нелинейных искажений с помощью полос шума продукты нелинейных искажений в полосе тестового сигнала не учитываются. При измерении же по структурной схеме на рис. 3.21 учитывается вся мощность продуктов нелинейных искажений.

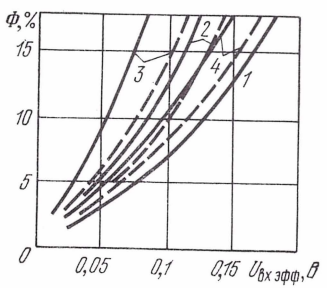


Рис. 3.23.

На рис. 3.22 приведена упрощенная принципиальная схема рассматриваемого измерителя нелинейных искажений. На транзисторах *Т1—Т3* выполнен генератор пилообразного напряжения фантастронного типа. Нелинейные характеристики аппроксимируются с помощью диодно-резисторных ячеек, подстраиваемых соответствующими потенциометрами. Сигнал с функционального преобразователя поступает на амплитудный модулятор *Т4*, *Т5*, на второй вход которого поступает сигнал с генератора синусоидального сигнала *Т6*. Фазовращатель выполнен на конденсаторе *С* и резисторе *R*. Сигналы с гнезд *К1* и *К2* служат для контроля формы модулирующего сигнала и огибающей тестового сигнала при формировании необходимого распределения $w(x)$.

На рис. 3.23 сплошными линиями показаны результаты измерения нелинейных искажений сигнала в ламповом двухкаскадном усилителе. Номера кривых соответствуют номерам распределений тестового сигнала в табл. 5. Результаты измерений, как и приведенные в предыдущих параграфах результаты расчетов, подтверждают существенную зависимость степени искажений сигнала от его одномерного распределения. Например, при равенстве мощностей входных сигналов искажения сигнала с нормальным распределением больше чем в три раза превышают искажения синусоиды. Ис-

кажения сигнала с равномерным распределением превышают искажения синусоиды примерно в полтора раза. Если же приравнять их размахи, то отличие станет еще меньшим.

Штриховыми линиями на рис. 3.23 показаны результаты измерений с помощью тех же тестовых сигналов, но при полном подавлении составляющих выходного сигнала в полосе тестового сигнала, т. е. результаты измерений методом полос шума. Они оказываются значительно меньше, чем оценки искажений, учитывающие всю мощность продуктов искажений. Это занижение, неизбежность которого показана в § 3.4, в данном случае равно 20 . . . 30%.

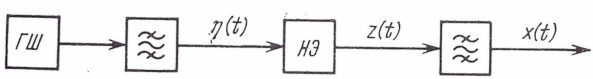


Рис. 3.24.

Другим способом формирования узкополосного тестового сигнала с распределением, отличным от нормального, может служить нелинейное безынерционное преобразование узкополосного нормального процесса $\eta(t)$ с последующей фильтрацией результата преобразования [59] (рис. 3.24).

Нормальный узкополосный случайный процесс можно представить в виде [36, 78]

$$\eta(t) = A(t)\sin[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где $A(t)$, $\varphi(t)$ — функции, изменяющиеся намного медленнее, чем $\sin\omega_0 t$, причем фаза $\varphi(t)$ распределена равномерно, а огибающая $A(t)$ имеет распределение Релея:

$$w_A(A) = Ae^{-A^2/2\sigma^2}/\sigma^2.$$

Если $\eta(t)$ достаточно узкополосен, то, используя квазистационарный метод, $z(t)=\psi[\eta(t)]$ можно представить в виде

$$z(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i[A(t)]\sin\{i[\omega_0 t + \varphi(t)]\},$$

где

$$A_i(A) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(A \sin t) \sin it \, dt$$

— коэффициент разложения сигнала $z(t)$ в ряд Фурье в предположении, что сигнал $\eta(t)$ имеет постоянную амплитуду A. Поскольку полосовой фильтр подавляет составляющие высших частот сигнала $z(t)$, имеем

$$x(t) = A_1[A(t)] \sin[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Полученное выражение для сигнала $x(t)$ совпадает с (3.61). Наличие флуктуирующей фазы $\varphi(t)$, имеющей равномерное распределение, не влияет на вид распределения $w(x)$, которое и в этом случае определяется (3.62).

Представляя $\psi(\eta)$ как сумму четной и нечетной функций, получаем, что $A_1(A)$ определяется видом только нечетной. Поэтому далее будем считать, что $\psi(\eta)$ — нечетная функция, тогда

$$A_1(A) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \psi(A \sin t) \sin t \, dt. \qquad (3.64)$$

Для получения требуемого распределения тестового сигнала распределение A_1 w_{A1} должно удовлетворять (3.63). В свою очередь, распределение w_{A1} можно выразить через w_A:

$$w_{A1}(A_1) = w_A(A) / |dA_1/dA|,$$

откуда

$$W_{A_1}(A_1) = 1 - e^{-A^2/2\sigma^2}, \qquad (3.65)$$

где

$$W_{A_1}(A_1) = \int_0^{A_1} w_{A_1}(q) \, dq$$

— интегральное распределение A_1.

Из (3.65) можно найти $A_1(A)$, обеспечивающее требуемое $w(x)$, затем по известному $A_1(A)$ из уравнения (3.64) найти $\psi(\eta)$, обеспечивающую требуемое распре-

деление $w(x)$. Непосредственной подстановкой в (3.64) можно показать, что это интегральное уравнение имеет решение

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\eta \int_0^{\pi/2} A_1(\eta \sin t)\, dt \right]. \qquad (3.66)$$

Таким образом, с помощью нелинейного элемента с характеристикой $\psi(\eta)$ и полосового фильтра из узкополосного нормального процесса можно сформировать сигнал с заданным симметричным одномерным распределением.

При измерении нелинейных искажений с помощью такого тестового сигнала применима структурная схема на рис. 3.21, но ее часть, обведенная штриховой линией, следует заменить в соответствии с рис. 3.24.

Пример 3.8. Определить характеристику $\psi(\eta)$, обеспечивающую равномерное распределение тестового сигнала. Для простоты положим $\sigma = 1$, $b = 2$.

Из (3.63) имеем (см. также табл. 5)

$$w_{A_1}(A_1) = \begin{cases} A_1/\sqrt{1 - A_1^2}, & A_1 \leqslant 1, \\ 0, & A_1 > 1. \end{cases}$$

Тогда из (3.65)

$$A_1(A) = \sqrt{1 - e^{-A^2}}$$

и из (3.66)

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^{-\eta^2 \sin^2 t}}\, dt \right).$$

Получить ψ в явном виде не удалось. Результаты приближенных вычислений приведены на рис. 3.25 (кривая *1*).

Пример 3.9. Решить ту же задачу для

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Производя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем

$$w_{A_1}(A_1) = \begin{cases} 1, & A_1 \leqslant 1, \\ 0, & A_1 > 1, \end{cases}$$

$$A_1 = 1 - e^{-A^2/2};$$

$$\psi(\eta) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\left[\eta\int_0^{\pi/2}(1-e^{-\eta^2\sin^2 t/2})\,dt\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left\{1 - e^{-\eta^2/4}\left[\left(1-\frac{\eta^2}{2}\right)I_1\left(\frac{\eta^2}{4}\right)+\frac{\eta^2}{2}I_0\left(\frac{\eta^2}{4}\right)\right]\right\},$$

где $I_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Полученная характеристика показана на рис. 3.25 кривой *2*.

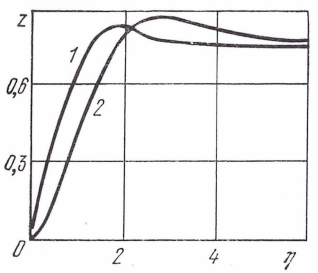


Рис. 3.25.

Рассмотренные методы позволяют получить узкополосный сигнал только с симметричным распределением. Несколько сложнее задача формирования тестового сигнала с несимметричным распределением и ограниченной полосой частот. Прежде всего покажем, что сигнал с несимметричным распределением не может иметь сколь угодно малую ширину спектра.

Действительно, представим сигнал с амплитудным или энергетическим спектром, отличным от нуля только на конечном интервале частот $[\Omega_1; \Omega_2]$, в виде

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\dot{A}(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega\right\},$$

где $\dot{A}(\omega)$ — односторонний комплексный спектр сигнала $x(t)$. Оператор $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ обозначает действительную часть своего аргумента.

Очевидно, что $\bar{x}=0$. Тогда третий центральный момент этого сигнала

$$M_3 = \overline{x^3(t)} = \frac{1}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\dot{A}(\omega_1)\times\right.$$

$$\left.\times\,\dot{A}(\omega_2)\,\dot{A}(\omega_3)\,\overline{e^{j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t}}\,d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3\right\}.$$

Поскольку

$$\overline{e^{j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t}} = 2\pi\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3),$$

получаем

$$M_3 = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \dot{A}(\omega_1)\,\dot{A}(\omega_2)\,\dot{A}^*(\omega_1+\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_2\right\},$$

где $\dot{A}^*(\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная с $\dot{A}(\omega)$.

Произведение $\dot{A}(\omega_1)\dot{A}(\omega_2)$ отличается от нуля, если ω_1 и ω_2 лежат в квадрате $\Omega_1 \leqslant \omega_1 \leqslant \Omega_2$, $\Omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \Omega_2$ (рис. 3.26), а функция $\dot{A}^*(\omega_1+\omega_2)$ отлична от нуля при изменении ω_1 и ω_2 в области между прямыми $\omega_1+\omega_2=\Omega_1$ и $\omega_1+\omega_2=\Omega_2$. Поэтому подынтегральное выражение тождественно равно нулю в области интегрирования и, следовательно, $M_3=0$, если выделенные на рисунке области не перекрываются, т. е. если

$$\Omega_2 < 2\Omega_1. \qquad (3.67)$$

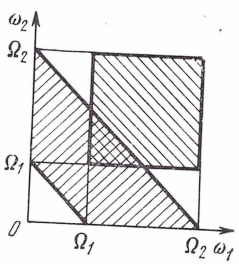


Рис. 3.26.

Таким образом, сигнал, у которого третий центральный момент и коэффициент асимметрии [36]

$$K_{ac} = M_3/\sigma^3 \qquad (3.68)$$

отличаются от нуля, не может занимать полосу уже одной октавы.

Аналогично можно показать, что, если

$$\Omega_2 < \Omega_1(n+1)/n, \qquad (3.69)$$

то все центральные моменты сигнала $x(t)$ $M_{2i+1}=0$ при $i \leqslant n$.

Получить общее решение задачи формирования сигнала с несимметричным одномерным распределением и минимально возможной полосой частот не удалось. Ограничимся рассмотрением формирования тестового сигнала с заданным коэффициентом асимметрии (3.68).

Исследуем сигнал

$$x(t) = \sum_{\nu=0}^{p-1} A_{m+\nu}\cos[(m+\nu)\,\Delta\omega t] + \sum_{\mu=0}^{2(p-1)} A_{2m+\mu}\cos[2m+\mu)\,\Delta\omega t]. \qquad (3.70)$$

При $p \ll m$ ширина спектра этого сигнала незначительно превышает одну октаву, и это превышение может быть сделано сколь угодно малым. Спектр такого сигнала состоит из двух полос; одна на интервале частот $[m\Delta\omega;\ (m+p-1)\Delta\omega]$, другая на интервале $[2m\Delta\omega;\ 2(m-p-1)\Delta\omega]$.

Производя выкладки, аналогичные приведенным ранее, получаем

$$M_3 = \frac{3}{4}\sum_{\mu=0}^{p-1}\sum_{\nu=\mu}^{p-1} A_{m+\nu}A_{m+\mu}A_{2m+\mu+\nu}. \qquad (3.71)$$

Для упрощения положим $A_i = A_1$, $m \leqslant i \leqslant m + p - 1$, $A_i = A_2$, $2m \leqslant i \leqslant 2(m + p - 1)$. Тогда

$$M_3 = 3p(p+1)A^2_1 A_2/8, \tag{3.72}$$

$$K_{ac} = \frac{3p(p+1)A^2_1 A_2}{4\sqrt{[pA^2_1 + (2p-1)A^2_2]^3}} \leqslant \frac{p+1}{\sqrt{6(2p-1)}}.$$

Равенство выполняется при

$$A_1 = \sigma\sqrt{4/3p},\ A_2 = \sigma\sqrt{2/3(2p-1)}.$$

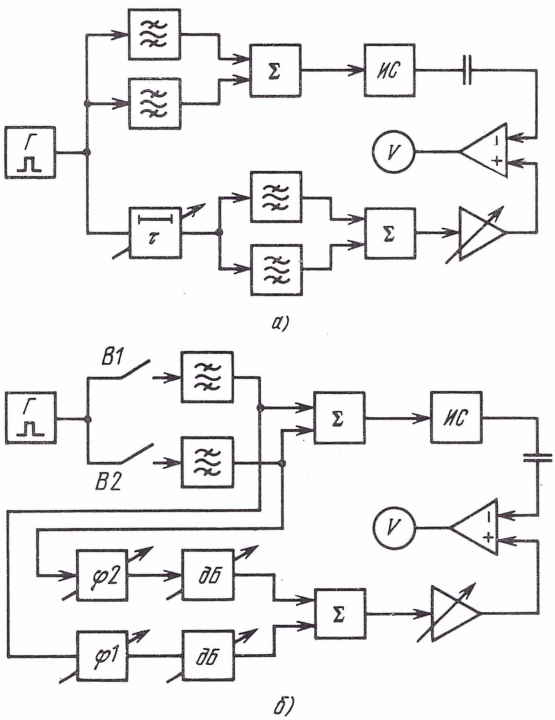


Рис. 3.27.

Из (3.72) видно, что, взяв достаточно большое p, можно обеспечить сколь угодно большое значение коэффициента асимметрии.

Одним из возможных способов формирования сигнала (3.70) является узкополосная фильтрация периодической последовательности коротких импульсов, например, прямоугольных, следующих с периодом $T = 2\pi/\Delta\omega$.

Этот сигнал подается на два полосовых фильтра, один из которых имеет полосу пропускания $[m\Delta\omega;\ (m+p-1)\Delta\omega]$ и комплексный коэффициент передачи $\dot{K}_1(\omega)$, а второй — полосу пропускания $[2m\Delta\omega;\ 2(m+p-1)\Delta\omega]$ и коэффициент передачи $\dot{K}_2(\omega)$. Два варианта схемы для измерения нелинейных искажений с помощью такого сигнала показаны на рис. 3.27.

Схема на рис. 3.27,*а* применима, если можно пренебречь линейными искажениями сигнала исследуемой системой в полосе частот $[m\Delta\omega;\ 2m\Delta\omega]$. В этом случае при измерении минимизируют F, изменяя задержку импульсов, используемых для формирования тестового сигнала, и коэффициент усиления.

Если линейные искажения значительны, то можно применить схему, показанную на рис. 3.27,*б*. В этом случае значение F минимизируют, изменяя коэффициент усиления усилителя и фазовый сдвиг фазовращателей: $\varphi 1$, который компенсирует фазовые сдвиги первой полосы тестового сигнала, и $\varphi 2$, который компенсирует фазовые сдвиги второй полосы. Предварительно с помощью аттенюаторов при поочередно замыкаемых ключах *B1* и *B2* компенсируют различие коэффициентов передачи исследуемой системы на частотах $m\Delta\omega$ и $2m\Delta\omega$.

При записи тестового сигнала в виде (3.70), предполагалось, что все его составляющие имеют одинаковые фазы. Для реальных полосовых фильтров это будет не так. Поэтому следует считать, что

$$M_3 = \frac{3}{4}\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=\nu}^{p-1} A_{m+\nu}A_{m+\mu}A_{2m+\mu+\nu}\dot{K}_1[(m+\right.$$

$$\left.+\nu)\Delta\omega]\,\dot{K}_1[(m+\mu)\Delta\omega]\,\dot{K}^*_2[(2m+\nu+\mu)\Delta\omega]\right\},$$

где A_i — амплитуда i-й гармоники периодической последовательности импульсов.

Требуемое значение коэффициента асимметрии сигнала $x(t)$ подбирают экспериментально, регулируя полосы пропускания фильтров или частоту повторения импульсов.

Глава 4

ШУМОВЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

Внутренний шум, накладывающийся на сигнал при его прохождении через систему, бывает двух видов: аддитивный и мультипликативный. При анализе шумовых искажений обычно считают, что другие виды искажений отсутствуют. Однако при решении некоторых задач (например, при расчете динамического диапазона) следует учитывать и другие искажающие факторы. Внутренний шум, как правило, следует рассматривать как случайный процесс, статистически независимый от передаваемого сигнала.

4.1. Расчет искажений, вызванных аддитивным шумом

При наличии аддитивного шума выходной сигнал $y(t)$ является суммой входного сигнала $x(t)$ и шума *) $z(t)$:

$$y(t)=x(t)+z(t). \tag{4.1}$$

Аддитивный шум обычно считают стационарным случайным процессом со средним, равным нулю, имеющим чаще всего нормальное распределение, хотя могут встретиться и другие распределения. Например, фон переменного тока имеет распределение, близкое к арккосинусному.

Поскольку существующие методы оценки шумовых искажений имеют в основном статистический характер, то, как уже отмечалось в § 1.4, значительного различия между ними и единым методом нет. Учитывая это, а также простой характер взаимосвязи входного и выходного сигналов (4.1), приведем без особых пояснений выражения для оценки шумовых искажений по некоторым критериям.

Очевидно, что в силу безынерционности преобразования (4.1) идеальные системы, определенные в соответствии с (1.2) и (1.3), будут идентичными, и для всех критериев следует положить $k_0=1$, $a_0=\tau_0=\varphi_0(\omega)\equiv 0$.

*) Здесь и далее, употребляя термин «шум», подразумеваем одновременно шум и помехи, поскольку они одинаково влияют на искажение формы сигнала.

При этом продукты искажений $\xi(t)$ совпадают с шумом $z(t)$, и исследование продуктов искажений сводится к исследованию самого шума.

Среднеквадратичный критерий. Если F и Φ заданы (1.17), то

$$\Phi = \sqrt{\overline{z^2(t)}/[\overline{x^2(t)} - \overline{x(t)}^2]} \tag{4.2}$$

и полученная оценка искажений совпадает с отношением шум/сигнал. Для определения этой оценки нужно знать единственную характеристику шума — его мощность или действующее значение на выходе, которые могут быть выражены и через другие применяемые характеристики шума. Необходимая информация о передаваемом сигнале также минимальна и сводится к действующему значению переменной составляющей, необходимому для нормировки $F_{\text{мин}}$.

Интегральные критерии. Для всех интегральных критериев (1.7) с функцией потерь (1.8)

$$F_{\text{мин}} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\, w_z(z)\, dz, \tag{4.3}$$

где $w_z(z)$ — одномерная плотность вероятности шума $z(t)$.

Для интервального критерия, например,

$$\Phi = F_{\text{мин}} = 1 - \int_{n}^{m} w_z(z)\, dz,$$

для среднемодульного

$$F_{\text{мин}} = \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, w_z(z)\, dz$$

и т. д.

Из (4.3) видно, что в общем случае для расчета значения критерия различия сигналов при анализе шумовых искажений достаточно знать одномерное распределение помехи на выходе системы.

При использовании критерия различия (1.7) при произвольной функции потерь

$$F_{\text{мин}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x+z;\ x)\, w_z(z)\, w(x)\, dz\, dx. \tag{4.4}$$

В этом случае, кроме распределения шума необходимо знать одномерное распределение передаваемого сигнала.

Критерий равномерного приближения. Для этого критерия

$$F_{\text{мин}} = \max |z(t)|. \tag{4.5}$$

Для шумовых искажений остается в силе все сказанное на с. 81 о необходимости учитывать при расчете искажений финитность распределений реальных сигналов. Поэтому применение критерия равномерного приближения целесообразно, например, для описания шумовых искажений, вызванных фоном переменного тока, питающего исследуемую систему. В то же время рекомендовать этот критерий при исследовании теплового или дробового шума нельзя, поскольку для их описания вполне оправдано применение нормального распределения, но в этом случае, даже рассматривая усеченное нормальное распределение, можно прийти только к тривиальным результатам: $F_{\text{мин}} \leqslant \max |y(t)|$.

При расчете динамического диапазона исследуемой системы, который определяют из условия непревышения искажениями допустимого значения, необходимо учитывать как шумовые, так и нелинейные искажения сигнала. В этом случае оператор реальной системы может быть представлен двумя вариантами

$$y(t) = f[x(t)] + z(t) \tag{4.6}$$

или

$$y(t) = f[x(t) + z(t)]. \tag{4.7}$$

Первая запись является более простой, а продукты нелинейных искажений при таком представлении оказываются не зависящими от шума, что существенно упрощает расчет суммарной оценки искажений. Например, при среднеквадратичном критерии

$$\Phi = \sqrt{\Phi^2_{\text{нл}} + \Phi^2_{\text{ш}}}, \tag{4.8}$$

где $\Phi_{\text{нл}}$, $\Phi_{\text{ш}}$ — величины нелинейных и шумовых искажений.

В общем случае необходимая для расчета интегрального критерия плотность вероятности продуктов искажений w_ξ представляет собой свертку плотности вероятности продуктов нелинейных искажений $w_{\xi_н}$, задаваемой, например, (3.50), и плотности вероятности шума w_z: $w_\xi = w_z * w_{\xi_н}$.

Более соответствует реальным условиям формула (4.7), поскольку наиболее ощутимый вклад в суммарный шум вносит собственный шум входных каскадов, проходящий затем вместе с сигналом через последующие линейные и нелинейные каскады. В этом случае вычисления существенно усложняются. Например, при среднеквадратичном критерии остаются в силе формулы (3.4), но для определения $\overline{y}$, $\overline{xy}$ или $\overline{y^2}$, которые оказываются функциями двух случайных аргументов, их необходимо усреднять как по x, так и по z, т. е.

$$\overline{\psi(x; z)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x; z)\, w(x)\, w_z(z)\, dx\, dz, \qquad (4.9)$$

где $\psi(x; z)$ равно либо $f(x+z)$, либо $f^2(x+z)$, либо $xf(x+z)$.

Для произвольного интегрального критерия

$$F = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho[f(x+z); kx+a]\, w(x)\, w_z(z)\, dx\, dz. \quad (4.10)$$

Поэтому при характеристике нелинейного элемента общего вида даже при среднеквадратичном критерии необходимо знать одномерные распределения шума и сигнала. Однако практический интерес представляют случаи относительно малых искажений, которые приводят, например, к значениям среднеквадратичного критерия, не превышающим 20—30%. Тогда (4.7) можно приближенно записать в виде

$$y(t) \approx f[x(t)] + f'[x(t)]\, z(t).$$

В этом случае составляющая выходного сигнала, обусловленная шумом, хотя и зависит от входного сигнала, однако из-за малости в среднем колебаний производной f' относительно k (4.7) можно свести к (4.6), записав

$$y(t) \approx f[x(t)] + k_0 z(t),$$

где k_0 — эквивалентный коэффициент передачи нелинейного устройства с характеристикой $f(x)$ при передаче сигнала $x(t)$.

Пример 4.1. Определить минимально возможные искажения сигнала с нормальным распределением, имеющим нулевое среднее, при его прохождении через элемент с линейно-квадратичной характеристикой (3.18) и динамический диапазон этого элемента при наличии аддитивного шума с приведенной ко входу дисперсией σ^2_z. Крите-

рий отличия сигналов среднеквадратичный. Динамический диапазон определяется в соответствии с (1.13), где $X_{макс}$ и $X_{мин}$ — максимально и минимально возможные действующие значения входного сигнала $\sigma_{макс}$ и $\sigma_{мин}$, при которых искажения не превышают допустимого значения $\Phi_{доп}$.

По условиям примера имеем

$$y(t)=\alpha_1 x(t)+\alpha_2 x^2(t)+z(t).$$

Тогда в соответствии с (4.8) и с учетом (3.19)

$$\Phi=\sqrt{2\,(\alpha_2/\alpha_1)^2\,\sigma^2+\sigma^2_z/\sigma^2}. \qquad (4.11)$$

Минимально возможное значение искажений

$$\Phi_{мин}=\sqrt{2\sqrt{2}\,|\alpha_2/\alpha_1|\,\sigma_z}$$

достигается при дисперсии входного сигнала

$$\sigma^2=\sigma_z/\sqrt{2}\,|\alpha_2/\alpha_1|.$$

Очевидно, что динамический диапазон может быть определен только при $\Phi_{доп}>\Phi_{мин}$. Из условия $\Phi<\Phi_{доп}$ находим

$$\sigma^2_{\substack{макс\\мин}}=\frac{\Phi^2_{доп}\pm\sqrt{\Phi^4_{доп}-4\sigma^2_z\,(\alpha_2/\alpha_1)^2}}{2\,(\alpha_2/\alpha_1)^2}.$$

Тогда

$$D=10\lg\frac{\Phi^2_{доп}+\sqrt{\Phi^4_{доп}-4\sigma^2_z\,(\alpha_2/\alpha_1)^2}}{\Phi^2_{доп}-\sqrt{\Phi^4_{доп}-4\sigma^2_z\,(\alpha_2/\alpha_1)^2}}\approx$$

$$\approx 20\lg\frac{\Phi^2_{доп}}{\sqrt{2}\,\sigma_z\,|\alpha_2/\alpha_1|}.$$

Приближенное соотношение тем точнее, чем больше $\Phi_{доп}$ превышает $\Phi_{мин}$. Практически оно справедливо при $\Phi_{доп}>1{,}5\Phi_{мин}$ и соответствует тому, что $\sigma_{мин}$ определяется из условия $\Phi_ш=\Phi_{доп}$, а $\sigma_{макс}$ из условия $\Phi_н=\Phi_{доп}$.

Если считать, что источник шума включен на входе, то

$$y(t)=\alpha_1[x(t)+z(t)]+\alpha_2[x(t)+z(t)]^2.$$

Тогда в соответствии с (4.10) в предположении о нормальности шума

$$\overline{y}=\alpha_2(\sigma^2+\sigma^2_z);\qquad \overline{xy}=\alpha_1\sigma^2;$$

$$\overline{y^2}=\alpha^2_1(\sigma^2+\sigma^2_z)+3\alpha^2_2(\sigma^2+\sigma^2_z)^2$$

и из (3.4) получаем

$$\Phi=\sqrt{2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2\sigma^2+\frac{\sigma^2_z}{\sigma^2}\left[1+4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2\sigma^2+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2\sigma^2_z\right]}.$$

Данное выражение для Φ отличается от (4.11), однако реально $\sigma_z/\sigma<0{,}2\ldots 0{,}3$ и $|\alpha_2/\alpha_1|\sigma<0{,}2\ldots 0{,}3$ и справедливы неравенства $(\alpha_2/\alpha_1)^2\sigma^2_z\ll(\alpha_2/\alpha_1)^2\sigma^2\ll 1$. Поэтому различием полученных выражений для Φ можно пренебречь. Аналогичный вывод может быть получен и для других примеров.

4.2. Расчет искажений, вызванных мультипликативным шумом

При мультипликативном шуме выходной сигнал представляет собой произведение передаваемого сигнала и случайного сомножителя $c(t)$, который обычно является более медленной функцией, чем передаваемый сигнал

$$y(t)=c(t)x(t). \tag{4.12}$$

Мультипликативный шум, как и аддитивный, будем считать стационарным случайным процессом. В большинстве случаев $c(t)$ не меняет своего знака, поэтому, не нарушая общности, можно положить $c(t)\geqslant 0$ и, следовательно, $\bar{c}>0$.

Преобразование (4.12) безынерционно, поэтому нет необходимости раздельно рассматривать электроакустические системы и видеотракты. Как и для всех безынерционных преобразований, положим $\tau_0=\varphi_0(\omega)\equiv 1$.

Рассмотрим для некоторых критериев результаты расчета искажений из-за мультипликативного шума.

Среднеквадратичный критерий. В этом случае

$$F=\overline{[c(t)x(t)-kx(t)-a]^2}=\overline{c^2}\,\overline{x^2}+k^2\overline{x^2}+$$
$$+a^2-2k\bar{c}\,\overline{x^2}-2a\bar{c}\,\bar{x}+2ka\bar{x}$$

будет минимально при k_0 и a_0, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_0+k_0\bar{x}-\bar{c}\,\bar{x}&=0,\\ k_0\overline{x^2}+a_0\bar{x}-\bar{c}\,\overline{x^2}&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$a_0=0;\quad k_0=\bar{c}; \tag{4.13}$$

$$\Phi=\sqrt{\frac{\overline{c^2}-(\bar{c})^2}{(\bar{c})^2}\,\frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}}.$$

Из полученной формулы видно, что величина искажений зависит только от отношения среднеквадратичного отклонения мультипликативного шума $\sigma_c=\sqrt{\overline{c^2}-(\bar{c})^2}$ к ее среднему значению. На величину искажений влияет также соотношение мощностей постоянной и переменной составляющих передаваемого сигнала. Постоянную со-

ставляющую входного сигнала предполагаем неинформативной. Однако, проходя через систему с мультипликативным шумом, постоянная составляющая превращается в функцию времени $\bar{x}c(t)$, вклад которой в продукты искажений тем больше, чем больше $|\bar{x}|$. Минимум искажений будет при $\bar{x}=0$. В этом случае

$$\Phi=\sigma_c/\bar{c} \tag{4.14}$$

не зависит от свойств передаваемого сигнала. Этот результат в некотором роде уникален. Ранее (§ 3.5) аналогичные результаты были получены при расчете нелинейных искажений по критерию равномерного приближения. Однако там все же нужно было знать размах передаваемого сигнала.

Интегральные критерии. Как и в случае аддитивного шума, при расчете мультипликативных искажений необходимо усреднение как по сигналу $x(t)$, так и по помехе $c(t)$:

$$F=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\rho(cx;\ kx+a)\,w_c(c)\,w(x)\,dc\,dx,$$

где w_c — одномерная плотность вероятности $c(t)$.

В общем случае, как и при расчете нелинейных искажений, объем вычислений, особенно при минимизации F по k и a, существенно возрастает по сравнению с таковым при среднеквадратичном критерии. Проиллюстрируем это на примере интервального критерия.

Интервальный критерий. Аналогично (3.49)

$$F=1-\int_{n}^{m} w_\varepsilon(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

где w_ε — одномерная плотность вероятности ошибки, которая в этом случае есть функция двух случайных аргументов x и c, т. е. $\varepsilon=cx-kx-a$.

Тогда [39]

$$w_\varepsilon(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\iint_{D} w(x)\,w_c(c)\,dx\,dc, \tag{4.15}$$

где область интегрирования D определяется из условия $cx-kx-a\leqslant\varepsilon$.

Производя преобразования, получаем

$$w_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{-\infty}^{0} w(x) \int_{\frac{\varepsilon+a}{x}+k}^{\infty} w_c(c)\,dc\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty} w(x) \int_{-\infty}^{\frac{\varepsilon+a}{x}+k} w_c(c)\,dc\,dx \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{|x|}\, w_c\left(\frac{\varepsilon+a}{x}+k\right) dx. \tag{4.16}$$

Выражение (4.16) позволяет в соответствии с (1.11) рассчитать значение любого критерия различия сигналов с функцией потерь (1.8). Для интервального критерия

$$F = 1 - \int_{n}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{|x|}\, w_c\left(\frac{\varepsilon+a}{x}+k\right) dx\,d\varepsilon =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{n+a}{x}+k}^{\frac{m+a}{x}+k} w_c(c)\, w(x) \operatorname{sign} x\,dc\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \times$$

$$\times \left[W_c\left(\frac{m+a}{x}+k\right) - W_c\left(\frac{n+a}{x}+k\right)\right] \operatorname{sign} x\,dx,$$

где $\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

W_c — интегральное распределение $c(t)$.

Дифференцируя F по k и a, получаем систему уравнений для определения k_0 и a_0:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \left[w_c\left(\frac{m+a_0}{x}+k_0\right) - w_c\left(\frac{n+a_0}{x}+k_0\right)\right] \operatorname{sign} x\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{|x|} \left[w_c\left(\frac{m+a_0}{x}+k_0\right) - w_c\left(\frac{n+a_0}{x}+k_0\right)\right] dx. \tag{4.17}$$

Наиболее просто решить эту систему уравнений для $w_c(c)$, симметричных относительно математического

ожидания $\bar{c}$. Действительно, обоим уравнениям будут удовлетворять значения k_0 и a_0, для которых выражения, стоящие в квадратных скобках, тождественно равны нулю, т. е. для всех x

$$w_c\left(\frac{m+a_0}{x}+k_0\right)=w_c\left(\frac{n+a_0}{x}+k_0\right).$$

При сделанном предположении о w_c это можно обеспечить при k_0 и a_0, для которых

$$(m+a_0)/x+k_0-\bar{c}=-[(n+a_0)/x+k_0-\bar{c}].$$

Отсюда получаем $k_0=\bar{c}$, $a_0=-(m+n)/2$. Для симметричных интервалов $[n;\ m]$ $a_0=0$. Таким образом, для симметричных w_c

$$a_0=-(m+n)/2;\quad k_0=\bar{c};$$

$$\Phi=F_{\text{мин}}=1-\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\left[W_c\left(\frac{m-n}{2x}+\bar{c}\right)-W_c\left(\frac{n-m}{2x}+c\right)\right]\operatorname{sign}x\,dx. \tag{4.18}$$

Пример 4.2. Определить искажения нормального сигнала с нулевым средним, если мультипликативный шум распределен равномерно, при интервальном критерии различия сигналов.

Имеем

$$w_c(c)=\begin{cases}1/b, & |c-\bar{c}|\leqslant b/2,\\ 0, & |c-\bar{c}|>b/2.\end{cases}$$

Распределение w_c симметрично. Поэтому можно воспользоваться формулой (4.18), из которой после вычислений

$$\Phi=2\left\{-J\left(\frac{m-n}{b\sigma}\right)+\frac{(m-n)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\operatorname{Ei}\left[-\frac{(m-n)^2}{2\sigma^2b^2}\right]\right\},$$

где $\operatorname{Ei}\{\cdot\}$ — интегральная показательная функция.

Критерий равномерного приближения. Этот критерий применим, если $x(t)$ и $c(t)$ ограничены по модулю. Тогда значение

$$F=\max|cx-kx-a|\leqslant|c-k||x|+|a|$$

будет минимально при $a_0=0$ и $k_0=(c_{\text{макс}}+c_{\text{мин}})/2$. При этом $F_{\text{мин}}\leqslant(c_{\text{макс}}-c_{\text{мин}})\max|x|/2$ и, если Φ определено в соответствии с (3.54),

$$\Phi\leqslant 2\frac{c_{\text{макс}}-c_{\text{мин}}}{c_{\text{макс}}+c_{\text{мин}}}\cdot\frac{\max[|x_1|;\ |x_2|]}{x_2-x_1}, \tag{4.19}$$

где, как и ранее, $[x_1; x_2]$ — интервал возможных значений входного сигнала. Если $x_1 = -x_2$, то

$$\Phi = (c_{\text{макс}} - c_{\text{мин}})/(c_{\text{макс}} + c_{\text{мин}}), \qquad (4.20)$$

как оценка, даваемая (4.14), не зависит от вида передаваемого сигнала

4.3. Об измерении шумовых искажений

Поскольку степень искажений сигнала аддитивным шумом зависит только от свойств этого шума, которые могут быть определены в отсутствие сигнала, необходимость в специальном тестовом сигнале для измерения этих искажений отсутствует.

Несколько иное положение с мультипликативным шумом. Из (4.13) и особенно из (4.14) следует, что степень искажений практически не зависит от свойств передаваемого сигнала. Однако измерение среднего значения и среднеквадратичного уклонения мультипликативной помехи возможно только при наличии передаваемого сигнала. Если исследуемая система пропускает постоянную составляющую входного сигнала, то наиболее просто измерить необходимые характеристики с помощью постоянного сигнала $x(t) = x_0$, который не подвергается линейным и нелинейным искажениям. Поэтому результат измерения будет искажен только аддитивным шумом.

Если $K(0) = 0$, то можно использовать меандр или гармоническое колебание. Первый сигнал применим для широкополосных систем, когда можно пренебречь линейными искажениями и форму сигнала выбирают так, чтобы свести к минимуму нелинейные искажения. Второй сигнал удобен для систем с ограниченной полосой пропускания, когда нужно устранить линейные искажения. Уровень этих сигналов выбирают таким, чтобы он соответствовал середине динамического диапазона исследуемой системы в окрестности минимума суммарных искажений из-за нелинейности и аддитивного шума.

В общем случае согласно (4.15) степень искажений из-за мультипликативного шума будет зависеть от одномерного распределения передаваемого сигнала. Поэтому для их измерения применимы те же тестовые сигналы и те же структурные схемы, что и для измерения нели-

нейных искажений. Отличие здесь состоит только в том, что при измерении нелинейных искажений важна как форма распределения тестового сигнала, так и его мощность. При измерении же искажений из-за мультипликативного шума главным является форма распределения, потому что для большинства оценок искажений Ф получается в результате нормирования $F_{\text{мин}}$ и окончательный результат не будет зависеть от уровня входного сигнала. Поэтому мощность тестового сигнала можно варьировать для обеспечения минимума ошибок измерения.

Измерение искажений можно заменить измерением одномерного распределения мультипликативного шума, знание которого позволяет рассчитать искажения при любом критерии различия сигналов. В этом случае необходимо измерять плотность вероятности выходного сигнала $y(t)$, подавая на вход постоянный сигнал x_0, меандр со значениями x_1 и x_2 или гармоническое колебание. В первом случае $w_y(y) = w_c(y/x_0)/|x_0|$ и определение w_c по w_y очевидно. Во втором случае

$$w_y(y) = \frac{p w_c(y/x_1)}{|x_1|} + \frac{(1-p)\, w_c(y/x_2)}{|x_2|}.$$

Поскольку w_c отлична от нуля только для значений аргументов одного знака, при x_1 и x_2 различных знаков определение w_c по w_y тоже просто, так как слагаемые в выражении для w_y отличны от нуля на разных полуосях.

При гармоническом сигнале w_y связана с w_c соотношением (3.62). Поэтому для определения w_c по w_y применима формула (3.63).

Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

Свойства линейной системы полностью описываются ее переходной характеристикой или импульсной реакцией $h(t;\theta)$. При этом

$$y(t) = \int_0^\infty x(t-\theta)\, h(t;\theta)\, d\theta. \qquad (5.1)$$

Если параметры системы постоянны, то $h(t; \theta)$ является функцией только одного аргумента θ. Такие линейные системы обычно называют стационарными или непараметрическими. В противном случае линейная система будет нестационарной или параметрической. Далее, если не будет сделано особых оговорок, будем рассматривать непараметрические системы.

Наряду с импульсной реакцией для описания стационарных систем используется комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega)$, представляющий преобразование Фурье от $h(\theta)$:

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega)\, e^{j\psi(\omega)} = \int_0^\infty h(\theta)\, e^{-j\omega\theta} d\theta, \qquad (5.2)$$

где $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика (сокращенно частотная характеристика); $\psi(\omega) = \arg \dot{K}(\omega)$ — фазочастотная характеристика (кратко фазовая характеристика).

Линейное преобразование (5.1) является инерционным, поскольку значения выходного сигнала в любой момент времени в общем случае зависят от поведения входного сигнала во все предыдущие моменты времени. Из-за нелинейности фазовых характеристик различные частотные компоненты входного сигнала будут получать различные фазовые сдвиги, что приведет к различным задержкам различных сигналов. Поэтому идеальные системы, определенные в соответствии с (1.2) и (1.3), будут существенно отличаться одна от другой и необходимо раздельно рассматривать линейные искажения в электроакустических системах и видеотрактах.

5.1. Расчет линейных искажений по среднеквадратичному критерию

Пусть F и Φ заданы (1.17) и известны характеристики исследуемой системы $h(\theta)$ или $\dot{K}(\omega)$.

Линейные искажения в видеотракте. Если идеальное преобразование задано (1.2), то ошибка $\varepsilon(t)$ может быть представлена в виде

$$\varepsilon(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = \int_0^\infty x(t-\theta)\, h(\theta)\, d\theta - kx(t-\tau) - a.$$

Тогда

$$F_л = \overline{\varepsilon^2(t)} = a^2 + k^2\overline{x^2(t-\tau)} + 2k\overline{x(t-\tau)} +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \overline{x(t-\theta_1)\,x(t-\theta_2)}\,h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2 -$$

$$-2a\int_0^\infty \overline{x(t-\theta)}\,h(\theta)\,d\theta - 2k\int_0^\infty \overline{x(t-\tau)\,x(t-\theta)}\,h(\theta)\,d\theta.$$

Под усреднением, как и ранее, понимаем усреднение по времени, если $x(t)$ — детерминированный сигнал, и усреднение по времени и по множеству, если рассматриваются искажения случайного процесса. Поэтому средние значения $\overline{x(t-\tau)}$ и $\overline{x^2(t-\tau)}$ не будут зависеть от τ, а средние вида

$$\overline{x(t-\theta_1)\,x(t-\theta_2)} = \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t-\theta_1)\,x(t-\theta_2)\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T-\theta_1}^{T-\theta_1} x(t)\,x[t-(\theta_2-\theta_1)]\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x[t-(\theta_2-\theta_1)]\,dt\right\} +$$

$$+\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T-\theta_1}^{-T}[\cdot]\,dt\right\} - \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{2T}\int_{T-\theta_1}^{T}[\cdot]\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} M\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,x[t-(\theta_2-\theta_1)]\,dt\right\} = \overline{x(t)\,x[t-(\theta_2-\theta_1)]},$$

где оператор $M\{\cdot\}$ означает среднее по множеству, будут функцией разности $\theta_2-\theta_1$.

Тогда, вводя обозначение $Q(\theta) = \overline{x(t)\,x(t-\theta)}$, получаем

$$F_л = a^2 + k^2Q(0) + 2ka\bar{x} - 2aK(0)\,\bar{x} -$$

$$-2k\int_0^\infty Q(\tau-\theta)\,h(\theta)\,d\theta + \int_0^\infty\int_0^\infty Q(\theta_1-\theta_2)\,h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2.$$

Для детерминированных сигналов

$$Q(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t-\theta)\, dt \qquad (5.3)$$

представляет собою временну́ю автокорреляционную функцию.

Для стационарного случайного процесса

$$Q(\theta) = B(\theta), \qquad (5.4)$$

а для нестационарного

$$Q(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} B(t; t-\theta)\, dt, \qquad (5.5)$$

где B — автоковариационная функция процесса $x(t)$.

Формулы (5.3), (5.5) применимы для сигналов со средней по времени мощностью, отличной от нуля. Если $x(t)$ является функцией, интегрируемой в квадрате, то в этих формулах необходимо исключить операцию вычисления пределов и рассматривать соответствующие интегралы в пределах от $-\infty$ до ∞. Таким образом, для расчета линейных искажений по квадратичному критерию достаточно знать спектрально-корреляционные свойства передаваемых сигналов. Фазовая структура сигналов не влияет на величину искажений.

Минимизируя F по k и a, получаем

$$a_0 = \bar{x}[K(0) - k_0];$$

$$k_0 = \frac{1}{\mathring{Q}(0)} \int_0^{\infty} \mathring{Q}(\tau - \theta)\, h(\theta)\, d\theta;$$

$$F_{л} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathring{Q}(\theta_1 - \theta_2)\, h(\theta_1)\, h(\theta_2)\, d\theta_1\, d\theta_2 - k_0^2 \mathring{Q}(0), \qquad (5.6)$$

где $\mathring{Q}(\theta) = Q(\theta) - (\bar{x})^2$. Для стационарных процессов $(\bar{x})^2 = Q(\infty)$.

Формулы (5.6) получены в результате минимизации $F_{л}$ только по k и a, поэтому необходимо найти минимум $F_{л}$ по τ. Из (5.6) видно, что минимально возможное значение критерия различия будет достигаться при τ_0, обеспечивающем максимум $|k_0|$, которое в записанном виде

является функцией τ, т. е. для определения τ_0 имеем условие

$$\left| \int_0^\infty \mathring{Q}(\tau-\theta)\, h(\theta)\, d\theta \right| = \max,$$

для выполнения которого необходимо, чтобы τ_0 удовлетворяло уравнению

$$\int_0^\infty \mathring{Q}'(\tau-\theta)\, h(\theta)\, d\theta = 0. \qquad (5.7)$$

Для упрощения формул (5.6) целесообразно ввести в рассмотрение энергетический спектр сигнала $x(t)$, который определим следующим образом*):

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{Q}(\theta) \cos\omega\theta\, d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\theta) \cos\omega\theta\, d\theta - 2\pi\bar{x}\delta(\omega).$$

Исключая из рассмотрения постоянные составляющие сигналов, что можно сделать с учетом значения a_0, задаваемого (5.6), ошибку $\varepsilon(t)$ можно трактовать как результат прохождения центрированного сигнала $\mathring{x}(t) = x(t)-\bar{x}$ через линейную систему с импульсной реакцией $h(\theta)-k\delta(t-\tau)$, которой соответствует комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(\omega) - ke^{-j\omega\tau}$. Тогда (5.6) можно записать в виде

$$a_0 = \bar{x}\,[K(0) - k_0];$$

$$k_0 = \int_0^\infty S(\omega)\, K(\omega) \cos[\psi(\omega) + \omega\tau_0]\, d\omega \Big/ \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega,$$

$$F_{\text{л мин}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \left| \dot{K}(\omega) - k_0 e^{-j\omega\tau_0} \right|^2 d\omega, \qquad (5.8)$$

$$\left| \int_0^\infty S(\omega)\, K(\omega) \cos[\psi(\omega) + \omega\tau]\, d\omega \right| = \max.$$

Уравнение (5.7) примет вид

$$\int_0^\infty \omega K(\omega)\, S(\omega) \sin[\psi(\omega) + \omega\tau_0]\, d\omega = 0. \qquad (5.9)$$

*) Для нестационарных случайных процессов существуют различные определения энергетического спектра [80]. Однако существу решаемой задачи, когда рассматривается совместное усреднение по времени и множеству, отвечает именно такое определение.

Если при решении уравнения (5.7) или (5.9) получают несколько корней, что в особенности возможно при колебательном характере Q или h, то следует брать τ_0, обеспечивающее абсолютный максимум $|k_0|$. При решении этого уравнения τ_0 может оказаться отрицательным, т. е. идеальная система, наиболее близкая к реальной, не задерживает сигнал, а «предсказывает» его, прогнозирует. Это решение не должно отбрасываться как противоречащее здравому смыслу, поскольку структура линейной системы может быть такой, что она позволяет прогнозировать некоторые типы сигналов. Возможность прогнозирования довольно широко используют при обнаружении сигнала на фоне помех и в системах автоматического регулирования для компенсации задержек сигналов в процессе их обработки.

Окончательно формулу для оценки линейных искажений сигнала в видеотракте можно записать в виде

$$\Phi_{\text{л}} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty S(\omega)\,|\dot{K}(\omega) - k_0 e^{-j\omega\tau_0}|^2\,d\omega}{k^2{}_0 \int_0^\infty S(\omega)\,d\omega}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\int_0^\infty S(\omega)\,d\omega \int_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\,d\omega}{\left\{\int_0^\infty S(\omega)\,K(\omega)\cos[\psi(\omega) + \omega\tau_0]\,d\omega\right\}^2}} - 1, \quad (5.10)$$

что совпадает с результатами, приводимыми в [1, 91, 94, 103].

Соотношение (5.10) можно рассматривать как результат сравнения по среднеквадратичному критерию комплексных частотных характеристик исследуемой системы и идеальной системы с весовой функцией $S(\omega)$.

Из этой формулы видно, что синусоидальный сигнал, как и следовало ожидать, не подвержен линейным искажениям. Действительно, если $x(t) = A\cos\omega_0 t$, то $S(\omega) = \pi A^2 \delta(\omega \pm \omega_0)$ и k_0 достигает максимума при $\tau_0 = [\pm n\pi + \psi(\omega_0)]/\omega_0$. При этом $\Phi = 0$. Значение τ_0 в этом случае не является единственным, поскольку для периодических сигналов задержки, кратные периоду, не имеют смысла. Точно так же для таких сигналов нет

принципиального отличия между задержкой и прогнозированием.

Из (5.10) также видно, что степень линейных искажений, как и следовало ожидать, не зависит от мощности входного сигнала.

При расчете нелинейных искажений произвольного сигнала по среднеквадратичному критерию отмечалось, что полученную оценку можно рассматривать как обобщение коэффициента гармоник на более широкий класс сигналов. Формула (5.10), полученная исходя из тех же предпосылок, дает оценку линейных искажений, смысл которой тот же, что и оценки нелинейных искажений (3.4). Поэтому, если при традиционных методах оценки различных искажений постановка вопроса о том, что приводит к бóльшим искажениям сигнала — коэффициент гармоник в 5% или неравномерность частотной характеристики в 5 дБ, была бессмысленной, то при использовании оценок (3.4) и (5.10) количественное сравнение действия различных факторов вполне правомерно. Это, в частности, позволяет согласованно задавать нормы на различные виды искажений без предъявления чрезмерно жестких требований к искажениям одного вида, если при этом допускаются значительные искажения других видов. При этом подразумевается, что применяемый критерий различия сигналов, в данном случае среднеквадратичный, соответствует специфике применения исследуемой системы. Например, его применение достаточно оправдано при исследовании искажений сигналов в информационно-измерительных системах. В ряде же случаев (например, в электроакустике), применение среднеквадратичного критерия может оказаться нецелесообразным, поскольку субъективное восприятие будет зависеть не только от мощности продуктов искажений, но и от их спектрального состава. В этих случаях, прежде чем сравнивать оценки различных искажений, необходимо правильно выбрать критерий.

Пример 5.1. Определить линейные искажения стационарного случайного процесса с автокорреляционной функцией $K(\theta) = e^{-\alpha|\theta|}$ при его прохождении через переходную RC-цепочку с импульсной реакцией

$$h(\theta) = \delta(\theta) - e^{-\theta/T}/T,$$

где $T = RC$ — постоянная времени цепочки.

Очевидно, что практический интерес может представлять только случай $\alpha T \gg 1$, когда степень искажения относительно мала. Поскольку $\bar{x} = 0$, $a_0 = 0$, $\mathring{Q} = K(\theta)$. Рассмотрим два случая.

а) $\tau \geqslant 0$. Тогда согласно (5.6)

$$k_0 = \frac{1}{\overset{\circ}{Q}(0)} \int_0^\infty e^{-\alpha |\tau - \theta|} \left[\delta(\theta) - \frac{e^{-\theta/T}}{T} \right] d\theta =$$

$$= \alpha T \left[\frac{2e^{-\tau/T}}{1 - \alpha^2 T^2} - \frac{e^{-\alpha\tau}}{1 - \alpha T} \right].$$

Уравнение (5.7) в этом случае принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-\alpha |\tau_0 - \theta|} \operatorname{sign}(\tau_0 - \theta) \left[\delta(\theta) - \frac{e^{-\theta/T}}{T} \right] d\theta =$$

$$= \frac{2}{1 - \alpha^2 T^2} e^{-\tau_0/T} - \frac{1}{1 - \alpha T} e^{-\alpha\tau_0} = 0,$$

откуда при $\alpha T \neq 1$

$$\tau_0 = T \ln \frac{(1 + \alpha T)}{2} \Big/ (\alpha T - 1).$$

Дополнительное исследование экстремума показывает, что при этом значении τ_0 k_0 достигает не максимума, а минимума. Максимум достигается на границе области исследуемых значений τ при $\tau_0 = 0$. При этом $k_0 = \alpha T/(1+\alpha T)$.

б) $\tau_0 \leqslant 0$. В этом случае

$$k_0 = \alpha T e^{-\alpha\tau}/(1 + \alpha T)$$

и максимум k_0 достигается также при $\tau_0 = 0$.

Окончательно получаем

$$a_0 = 0; \; k_0 = \alpha T/(1 + \alpha T) \approx 1; \; \tau_0 = 0;$$

$$F_{\text{мин}} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\alpha |\theta_1 - \theta_2|} \left[\delta(\theta_2) - \frac{e^{-\theta_2/T}}{T} \right] \times$$

$$\times \left[\delta(\theta_1) - \frac{e^{-\theta_1/T}}{T} \right] d\theta_1 d\theta_2 - \alpha^2 T^2/(1 + \alpha T)^2 = \frac{\alpha T}{(1 + \alpha T)^2};$$

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}.$$

Таким образом, переходная RC-цепочка не вносит временных сдвигов в сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией, а степень вносимых ею искажений обратно пропорциональна корню квадратному из ее постоянной времени.

Пример 5.2. Рассмотрим воздействие сигнала с энергетическим спектром

$$S(\omega) = \nu/[1 + \nu^2 (\omega - \Omega)^2] + \nu/[1 + \nu^2 (\omega + \Omega)^2]$$

на резонансный контур с частотной характеристикой

$$\dot{K}(\omega) = 1/[1 + j\lambda(\omega - \omega_0)].$$

В данном случае также $\bar{x} = a_0 = 0$, $\overline{x^2} = 1$.

Решение будем проводить в частотной области. Из (5.8) получаем

$$k_0 = \frac{2D\nu}{\lambda} e^{-\tau_0/\lambda} \cos(\omega_0\tau) +$$

$$+ C\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) e^{-\tau_0/\nu} \cos\Omega\tau + C\lambda(\Omega - \omega_0)\, e^{-\tau_0/\nu} \sin\tau\omega_0,$$

где

$$D = [\lambda^2 - \nu^2 + \nu^2\lambda^2(\Omega^2 - \omega^2{}_0) + 4\lambda^2\nu^2\omega_0(\omega_0 - \Omega)]/\Delta;$$

$$C = \nu^2[\nu^2 - \lambda^2 + \nu^2\lambda^2(\omega^2{}_0 - \Omega^2) + 4\lambda^2\nu^2\Omega(\Omega - \omega_0)]/\Delta;$$

$$\Delta = [\lambda^2(1 + \nu^2\Omega^2) - \nu^2(1 + \lambda^2\omega^2{}_0)]^2 + 4\lambda^2\nu^2(\omega_0 - \Omega) \times$$

$$\times [(\lambda^2 - \nu^2) + \nu^2\lambda^2\Omega\omega_0(\Omega - \omega_0)].$$

Поиск максимума F по τ приводит к трансцедентному уравнению вида

$$e^{-\alpha\tau_0} \sin(\omega_0\tau_0 + \psi_1) = R \sin(\Omega\tau_0 + \psi_2),$$

решение которого в общем случае получить не удалось. Поэтому в дальнейшем сделаем некоторые упрощающие предположения: 1) $\omega_0 = \Omega$, что соответствует точной настройке контура на частоту передаваемого сигнала; 2) $\nu > \lambda$, что эквивалентно практически реальному предположению о малости искажений; 3) $1/\Omega < \lambda$, что означает достаточно высокую добротность контура и с учетом предположения 2 узкополосность $x(t)$.

Согласно предположению 1

$$k_0 = [(\nu + \lambda) e^{-\tau_0/\nu} - 2\nu\lambda e^{-\tau_0/\lambda}] \frac{\cos\tau_0\Omega}{\nu^2 + \lambda^2}.$$

В соответствии с предположениями 2 и 3 можно пренебречь изменениями $e^{-\tau_0/\nu}$ и тем более $e^{-\tau_0/\lambda}$ при изменении τ_0 на период $2\pi/\Omega$. Поэтому поиск максимума $|k_0|$ можно свести к поиску максимума выражения, стоящего в квадратных скобках. Тогда для определения τ_0 получаем уравнение

$$(\nu + \lambda) e^{-\tau_0/\nu} = 2\nu e^{-\tau_0/\lambda},$$

откуда с учетом предположения 2

$$\tau_0 = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\nu}\right) \ln\frac{2\nu}{\nu + \lambda} \approx \frac{\ln 2}{\lambda};$$

$$k_0 = \frac{1}{\nu^2 - \lambda^2}\left[\nu(\nu - \lambda)\left(\frac{2\nu}{\nu + \lambda}\right)^{\lambda/(\nu - \lambda)} - \right.$$

$$\left. - 2\nu\lambda\left(\frac{2\nu}{\nu + \lambda}\right)^{\nu/(\nu - \lambda)}\right] \approx 1 - \lambda\ln 2/\nu \approx 1;$$

$$\Phi \approx \sqrt{(2\ln 2 - 1)\,\lambda/\nu} \approx 0{,}63\sqrt{\lambda/\nu}.$$

Линейные искажения в электроакустических системах. Учитывая вид идеальной системы задаваемой

(1.3), искажения целесообразно исследовать только в частотной области. В этом случае, исключая из рассмотрения нулевую частоту или, что то же самое, предполагая $\bar{x}=0$, ошибку $\varepsilon(t)$ можно рассматривать как результат преобразования входного сигнала линейной системой с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega) - ke^{j\varphi(\omega)}$. Тогда

$$F_{ч} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \left| \dot{K}(\omega) - ke^{j\varphi(\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Нетрудно видеть, что минимум $F_{ч}$ будет достигаться при $\varphi_0(\omega) = \psi(\omega)$. Тогда

$$F_{ч} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \left[K(\omega) - k_0 \right]^2 d\omega$$

достигает максимума при

$$k_0 = \int_0^\infty S(\omega) K(\omega) d\omega \Big/ \int_0^\infty S(\omega) d\omega \qquad (5.11)$$

и

$$\Phi_{ч} = \sqrt{\frac{\int_0^\infty S(\omega) d\omega \int_0^\infty S(\omega) K^2(\omega) d\omega}{\left[\int_0^\infty S(\omega) K(\omega) d\omega \right]^2} - 1}. \qquad (5.12)$$

Для электроакустических систем, как и следовало ожидать, степень линейных искажений зависит только от вида частотной характеристики исследуемой системы и инвариантна по отношению к фазовой. Поэтому величину $\Phi_{ч}$, задаваемую (5.12), можно рассматривать как оценку частотных искажений, что и отражено в индексе.

Учитывая выражение для $F_{ч}$ при $\varphi_0 = \psi(\omega)$, оценку линейных искажений в электроакустических системах при среднеквадратичном критерии различия сигналов можно трактовать как результат сравнения частотной характеристики реальной системы с равномерной частотной характеристикой по среднеквадратичному критерию с весовой функцией, равной энергетическому спектру сигнала. Аналогичный вывод был получен и для видеотрактов. Точно так же можно трактовать формулу (3.4)

для расчета нелинейных искажений. Во всех случаях сравниваются по среднеквадратичному критерию с весовой функцией характеристики реальной и идеальной систем, от вида которых зависят искажения каждого типа (комплексные частотные характеристики, их модули или амплитудные характеристики), а весовая функция определяется видом передаваемого сигнала. Для нелинейных систем ею является одномерная плотность вероятности, а для линейных — энергетический спектр.

Пример 5.3. Определить степень линейных искажений электроакустической системы, представляющей собой апериодическое звено первого порядка, с комплексным коэффициентом передачи $K(\omega)=1/(1+j\omega T)$ при воздействии на нее того же сигнала, что и в примере 5.1, т. е. сигнала с энергетическим спектром $S(\omega)=2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$.

В соответствии с (5.11)

$$k_0=\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\alpha^2+\omega^2)\sqrt{1+\omega^2T^2}}\Bigg/\int_0^\infty S(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{1-\alpha^2T^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2T^2}-1}$$

и в соответствии с (5.12)

$$\Phi_ч=\sqrt{\frac{1-\alpha T}{\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2T^2}-1}\right]}-1}\approx$$

$$\approx\sqrt{\left(\frac{4}{\pi}-1\right)\alpha T}\approx 0{,}52\sqrt{\alpha T}.$$

Приближенное соотношение записано в предположении $\alpha T\ll 1$, что соответствует предположению малости искажений.

Результаты вычисления линейных искажений по формуле (5.10) дают бо́льшую величину:

$$\Phi_л=\sqrt{(2\ln 2-1)\,\alpha T}\approx 0{,}63\sqrt{\alpha T}$$

при

$$\tau_0=\frac{T}{1-\alpha T}\ln\frac{2}{1+\alpha T}\approx T\ln 2.$$

5.2. Расчет частотных и фазовых искажений

При сложившейся практике исследования линейных искажений раздельно изучают частотные искажения, обусловленные неравномерностью частотной характеристики, и фазовые искажения, обусловленные нелинейно-

стью фазовой характеристики или неравномерностью группового времени запаздывания, являющегося производной от фазовой характеристики. Эту задачу можно решать и в рамках единого метода оценки искажений.

Как уже отмечалось, величину $\Phi_ч$, определяемую (5.12), можно рассматривать как меру частотных искажений. Если известна максимальная относительная неравномерность частотной характеристики

$$\mu = \frac{\max K(\omega) - \min K(\omega)}{\max K(\omega) + \min K(\omega)} = 10^{M/20} - 1,$$

где M — неравномерность частотной характеристики в децибелах, то $|[K(\omega) - k_0]/k_0| \leqslant \mu$ и из (5.12) получаем

$$\Phi_ч \leqslant \mu. \tag{5.13}$$

Поэтому обычно применяемая оценка частотных искажений по неравномерности частотной характеристики может служить оценкой сверху для частотных искажений любого сигнала с финитным спектром. Завышение этой оценки значительно, поскольку знак равенства в (5.13) возможен только в случае, если $K(\omega)$ не принимает других значений, кроме $\min K(\omega)$ и $\max K(\omega)$. При этом интегралы от $S(\omega)$ по множеству частот, на которых $K(\omega)$ принимает одно из значений, должны быть равны. Очевидно, что для реальных систем $\Phi_ч$ будет меньше μ. Проиллюстрируем это простейшим примером.

Пример 5.4. Пусть на интегрирующую RC-цепочку с постоянной времени T действует сигнал с равномерным спектром в полосе частот $[0; \Omega]$. Тогда $K(\omega) = 1/\sqrt{1+\omega^2T^2}$ и в пределах полосы частот сигнала

$$\mu = \frac{\sqrt{1+\Omega^2T^2} - 1}{\sqrt{1+\Omega^2T^2} + 1} \approx \frac{1}{4}\Omega^2T^2.$$

Полученное точное значение $\Phi_ч$ меньше μ почти в два раза. Из (5.11) и (5.12) получаем

$$\Phi_ч = \sqrt{\frac{\operatorname{arctg} \Omega T}{\ln^2(\Omega T + \sqrt{\Omega^2T^2+1})} - 1} \approx \frac{1}{3\sqrt{5}}\Omega^2T^2.$$

Полученное точное значение $\Phi_ч$ меньше μ почти в два раза.

При расчете фазовых искажений возможны два подхода. Первый из них заключается в следующем.

Оценку частотных искажений (5.12) после минимизации $F_ч$ по $\varphi(\omega)$ можно рассматривать как результат сравнения по среднеквадратичному критерию сигналов на выходе реальной системы и идеальной системы с комплексным коэффициентом передачи $\widetilde{K}(\omega)=ke^{j\psi(\omega)}$, у которой варьируемая частотная характеристика равномерна, а фазовая совпадает с фазовой характеристикой реальной системы. При оценке фазовых искажений можно сравнивать сигналы на выходе реальной системы и идеальной системы, у которой варьируется линейная фазовая характеристика, а частотная совпадает с частотной характеристикой реальной системы, т. е. $\widetilde{K}(\omega)=K(\omega)e^{-j\omega\tau}$. Тогда

$$F_ф=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\,|e^{j\psi(\omega)}-e^{-j\omega\tau}|^2\,d\omega$$

представляет собою результат сравнения по среднеквадратичному критерию с весом $S(\omega)K^2(\omega)$ функций $e^{j\psi(\omega)}$ и $e^{-j\omega\tau}$:

$$F_{ф\,мин}=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\,d\omega-\max_\tau\int_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\times\right.$$
$$\left.\times\cos[\psi(\omega)+\omega\tau]\,d\omega\right\}.$$

Нормируя, как обычно, $F_{мин}$ относительно мощности сигнала на выходе идеальной системы, наиболее близкой к реальной, получаем

$$\Phi_ф=\sqrt{2\left\{1-\frac{\max\limits_\tau\int\limits_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\cos[\psi(\omega)+\omega\tau]\,d\omega}{\int\limits_0^\infty S(\omega)\,K^2(\omega)\,d\omega}\right\}}. \qquad (5.14)$$

Для реальных случаев малости искажений при расчете фазовых искажений можно пренебречь неравномерно-

стью $K(\omega)$ и положить весовую функцию равной $S(\omega)$. Тогда

$$\Phi_{\phi} \approx \sqrt{2\left\{1 - \frac{\max\limits_{\tau}\int\limits_{0}^{\infty} S(\omega)\cos[\psi(\omega)+\omega\tau]\,d\omega}{\int\limits_{0}^{\infty} S(\omega)\,d\omega}\right\}}. \quad (5.15)$$

Для упрощения вычислений, особенно если $\dot{K}(\omega)$ можно представить в виде отношения двух полиномов от $j\omega$, весовую функцию удобнее брать в виде $S(\omega)K(\omega)$. При этом

$$\Phi_{\phi} = \sqrt{2}\left\{1 - \max_{\tau}\int\limits_{0}^{\infty} S(\omega)[\mathrm{Re}\{\dot{K}(\omega)\}\cos\omega\tau - \right.$$

$$\left. - \mathrm{Im}\{\dot{K}(\omega)\}\sin\omega\tau]\,d\omega\right\}^{1/2} \Big/ \sqrt{\int\limits_{0}^{\infty} S(\omega)K(\omega)\,d\omega}. \quad (5.16)$$

Если известно максимально возможное отклонение фазовой характеристики от линейной, которое по модулю не превосходит $\pi/2$, т. е. $|\Delta\psi| = |\psi(\omega) + \omega\tau_0| \leqslant \pi/2$, то из (5.14) получаем

$$\Phi_{\phi} \leqslant \sqrt{2(1 - \cos\Delta\psi)}. \quad (5.17)$$

Очевидно, что (5.17), как и (5.13), дает завышенную оценку искажений. Кроме того, практическое применение этой оценки ограничено тем, что для реальных систем на границах полосы пропускания модуль $\Delta\psi$ может существенно превосходить $\pi/2$ и (5.17) приводит к тривиальному результату $\Phi_{\phi} \leqslant 2$.

Другой подход к оценке фазовых искажений состоит в использовании результатов оценки линейных и частотных искажений. Величина $F_{ч}$, используемая при выводе (5.12), учитывает мощность продуктов искажений, обусловленных только неравномерностью частотной характеристики, а величина $F_{л}$ при выводе (5.10) учитывает суммарную мощность продуктов искажений, обусловленную отличием обеих характеристик от идеальных. Поэтому всегда $F_{л} \geqslant F_{ч}$. Превышение $F_{л}$ над $F_{ч}$ вызва-

но наличием фазовых искажений, и можно положить

$$F_{\Phi} = F_{\text{л}} - F_{\text{ч}} = \frac{\left[\int_0^{\infty} S(\omega) K(\omega)\, d\omega\right]^2 - \left[\max_{\tau} \int_0^{\infty} S(\omega) K(\omega) \cos(\psi(\omega) + \omega\tau)\, d\omega\right]^2}{\int_0^{\infty} S(\omega)\, d\omega}.$$

Нормируя для простоты F_{Φ} относительно мощности выходного сигнала, имеем

$$\Phi_{\Phi} \approx \left\{\int_0^{\infty} S(\omega) K(\omega) \{1 + \cos[\psi(\omega) + \omega\tau_0]\}\, d\omega \times \right.$$

$$\times \left. \int_0^{\infty} S(\omega) K(\omega) \{1 - \cos[\psi(\omega) + \omega\tau_0] d\omega\}^{1/2} \times \right.$$

$$\times \left[\int_0^{\infty} S(\omega)\, d\omega \int_0^{\infty} S(\omega) K^2(\omega)\, d\omega\right]^{-1/2} \approx \sqrt{\Phi^2_{\text{л}} - \Phi^2_{\text{ч}}}. \quad (5.18)$$

При малости частотных и фазовых искажений ($K(\omega) \approx k_0$, $\psi(\omega) \approx -\omega\tau_0$) формула (5.18) переходит в (5.15), что свидетельствует о слабой корреляции продуктов частотных и фазовых искажений.

В соответствии с (5.18) и с учетом результатов примера 5.3 для интегрирующей RC-цепочки при преобразовании сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией оценка фазовых искажений получается равной

$$\Phi_{\Phi} = \sqrt{0{,}63^2\alpha^2T^2 - 0{,}52^2\alpha^2T^2} \approx 0{,}36\sqrt{\alpha T}.$$

5.3. О возможности применения других критериев для расчета линейных искажений

Из предыдущего видно, что даже при использовании среднеквадратичного критерия объем вычислений при оценке линейных искажений значительно больше, чем при оценке нелинейных искажений. В первую очередь, это является следствием необходимости поиска минимума F по τ. Однако громоздкость вычислений не является принципиальным препятствием для расчета искажений в каждом конкретном случае при известных характеристиках сигнала и линейной системы. Существенно иным

оказывается положение при применении других критериев различия сигналов.

При использовании интегральных критериев (1.7) для расчета линейных искажений на множестве реализаций случайного стационарного процесса для определения F, который приобретает вид

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(y, \tilde{y})\, w(y, \tilde{y})\, dy d\tilde{y},$$

необходимо знать совместную плотность вероятности $w(y, \tilde{y})$ сигналов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, которые являются соответственно результатами линейного преобразования сигнала $x(t)$ в исследуемой системе с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega)$ и в идеальной системе с комплексным коэффициентом передачи $\dot{\tilde{K}}(\omega)$.

При использовании критериев с функцией потерь (1.8) в соответствии с (1.11) необходимо знать одномерное распределение ошибки $\varepsilon(t)$, которую, как уже отмечалось в § 5.1, можно рассматривать как результат линейного преобразования $x(t)$ системой с комплексным коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega) - \dot{\tilde{K}}(\omega)$.

Задача определения плотности вероятности процесса на выходе линейной системы имеет исчерпывающее решение только для нормальных процессов $x(t)$ [35, 74]. В этом случае как совместное распределение $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, так и одномерное распределение $\varepsilon(t)$ остаются нормальными. Для определения F в первом случае достаточно знать дисперсии, средние значения и коэффициент взаимной корреляции сравниваемых сигналов, которые легко выражаются через автокорреляционную функцию входного сигнала и операторы линейных систем. Во втором случае достаточно знать среднее значение и дисперсию ошибки $\varepsilon(t)$. При этом для всех критериев с четной функцией потерь (среднеквадратичный с четной весовой функцией, среднемодульный, интервальный при $-n=m$ и т. д.) значение F будет минимально при $\overline{\varepsilon}=0$ и минимально возможной дисперсии ошибки. Поэтому k_0, a_0 и τ_0 будут одинаковыми для всех критериев, а оценки искажений будут взаимно-однозначно определять друг друга. Таким образом, предположение о нормальности передаваемого сигнала существенно облегчает расчет искажений по всем критериям, сводя его к расчету по среднеквадратичному критерию. Однако при нормально-

сти $x(t)$ остается справедливым утверждение о невозможности применения критерия равномерного приближения для расчета искажений.

Если входной сигнал не является нормальным и не сводится к нему, то нельзя указать методы, позволяющие определить в общем случае все требуемые распределения для расчета линейных искажений. Невозможность расчета линейных искажений произвольного случайного процесса по произвольному критерию не исключает возможности измерения искажений этих сигналов по этим критериям. Однако измерения в этом случае должны выполняться только при реальных сигналах с использованием более сложной аппаратуры, предназначенной для измерения суммарных искажений, поскольку по результатам расчета нельзя определить, от каких характеристик реального сигнала зависит степень линейных искажений и какие характеристики должны моделироваться тестовым сигналом.

Для расчета линейных искажений случайного процесса электроакустическими системами можно использовать отличие энергетических спектров или автокорреляционных функций процессов $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$. Применение этих характеристик при исследовании электроакустических систем оправдано тем, что их изменение в линейных системах определяется только частотными характеристиками и не зависит от фазовых. Удобство использования этих характеристик заключается также в том, что для их определения достаточно знать только такие же характеристики входного сигнала, т. е. энергетический спектр или корреляционную функцию, которые наиболее широко применяют для описания случайных процессов. Недостатком такого подхода является отсутствие четкой физической трактовки получаемой оценки искажений.

При обсуждении трудностей расчета линейных искажений по критериям, отличным от среднеквадратичного, имелась в виду оценка искажений на множестве реализаций случайного процесса. Если необходимо оценить искажения полностью известного сигнала $x(t)$ (детерминированного сигнала или отдельной реализации случайного процесса), то эти трудности отсутствуют, поскольку значение критерия F можно рассчитать непосредственно по (1.7), подставив $y(t)$ и $\tilde{y}(t)$, выраженные через $x(t)$ и $h(\theta)$ или $K(\omega)$ с помощью интеграла Дюамеля или интеграла Фурье. При этом продукты искажений можно представить в виде конкретной функции времени.

5.4. Измерение линейных искажений с помощью тестового сигнала

Поскольку аналитический расчет линейных искажений сигнала возможен только для критериев, базирующихся на корреляционных свойствах сигналов, рекомендации относительно выбора тестового сигнала могут быть даны только для этих случаев. Поэтому далее будем исходить из среднеквадратичного критерия и для измерения F и Φ в схемах предусматривать квадратичные вольтметры. Однако при необходимости, используя те же тестовые сигналы, можно измерять искажения по степени отличия спектров или автокорреляционных функций.

На основании изложенного в § 5.1, 5.2 можно сделать вывод, о том что тестовый сигнал должен иметь энергетический спектр, форма которого близка к форме спектра реального сигнала. Уровень тестового сигнала, не влияющий на степень линейных искажений, как и при измерении искажений из-за мультипликативного шума, должен быть достаточно малым, чтобы не сказывалась нелинейность исследуемой системы, но достаточно большим по сравнению с внутренним аддитивным шумом, т. е. он должен соответствовать середине динамического диапазона.

Реальные сигналы, как правило, имеют непрерывный спектр. Сформировать сигнал с требуемым энергетическим спектром, если нет дополнительных требований к одномерному распределению, довольно просто. Это можно сделать, например, линейной фильтрацией широкополосного шума. Тогда тестовый сигнал будет иметь распределение, близкое к нормальному. Однако регулируемая задержка такого сигнала с непрерывным спектром сложна. Поэтому может оказаться более удобным использовать тестовый сигнал с дискретным спектром, вписанным в спектр реального сигнала (см. рис. 2.7). Колебания с частотами $\omega_i = i\Delta\omega$ $(i=\overline{1, n})$ можно получить умножением частоты гармонического колебания с частотой $\Delta\omega$, выдаваемого генератором синусоидального сигнала. Тогда в качестве задерживающего устройства можно применить фазовращатель.

Схема измерения линейных искажений с помощью такого тестового сигнала приведена на рис. 5.1. Умножители частоты в i-й ветви умножают частоту в i раз, а ат-

тенюаторы имеют коэффициенты передачи, пропорциональные $\sqrt{S(\omega_i)}$. По этой схеме при необходимости можно раздельно измерять частотные и фазовые искажения. В первом случае необходимо исключить фазовращатель в цепи, имитирующей идеальную систему, и включить фазовращатели после каждого аттенюатора в этом канале, что фактически приводит схему на рис. 5.1 к схеме измерения суммарных искажений много-

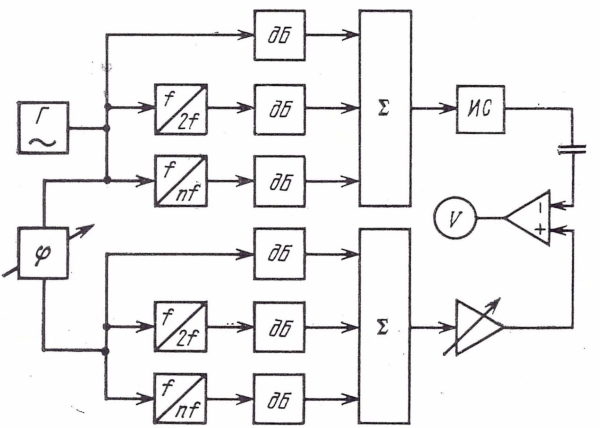


Рис. 5.1.

тонального сигнала в электроакустическом тракте (см. рис. 2.8). При измерении фазовых искажений в схеме на рис. 5.1 необходимо сделать переменными все аттенюаторы в цепи, имитирующей идеальную систему.

Более простой будет схема измерения линейных искажений видеотракта с помощью тестового сигнала, сформированного из последовательности коротких прямоугольных импульсов, выдаваемых импульсным генератором (рис. 5.2). Задержка таких импульсов сравнительно проста. Кроме того, имеются серийно выпускаемые генераторы парных импульсов с варьируемым интервалом времени между моментами их появления. Импульс малой длительности можно рассматривать как δ-функцию. Поэтому для обеспечения требуемой формы спектра тестового сигнала частотные характеристики $K_\Phi(\omega)$ двух идентичных линейных фильтров должны иметь вид

$$K_{\phi}(\omega) = c\sqrt{S(\omega)}, \tag{5.19}$$

где c — произвольная постоянная, определяющая уровень тестового сигнала. Фазовые характеристики этих фильтров могут быть произвольными, поскольку их вид не влияет на форму энергетического спектра.

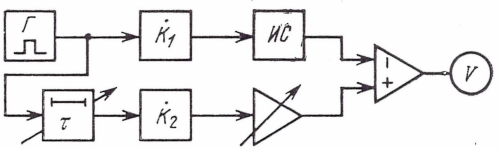


Рис. 5.2.

Различие частотных характеристик фильтров приводит к погрешности измерения искажений, которую можно отнести к искажениям сигнала в имитаторе идеальной системы. При этом

$$\Phi = \sqrt{\frac{\int_0^S |\dot{K}_{\phi 1}(\omega)|^2 d\omega \int_0^S |\dot{K}_{\phi 2}(\omega)|^2 d\omega}{\left|\int_0^S \dot{K}_{\phi 1}(\omega)\,\dot{K}_{\phi 2}(\omega)\, d\omega\right|^2}} - 1,$$

где $\dot{K}_{\phi 1}(\omega)$ и $\dot{K}_{\phi 2}(\omega)$ — реальные коэффициенты передачи формирующих фильтров.

Энергетические спектры реальных сигналов удовлетворяют условию [78]

$$\int_{-S}^{S} \frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \tag{5.20}$$

Условие (5.20) обеспечивает физическую реализуемость фильтров с частотной характеристикой (5.19), поскольку из него следует неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln K(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty, \tag{5.21}$$

являющееся условием физической реализуемости линейных фильтров в частотной области [72].

Раздельное измерение частотных и фазовых искажений с помощью структурной схемы, изображенной на рис. 5.2, невозможно. Однако наряду с простотой ее важным достоинством является то, что она позволяет формировать сигналы как с дискретным спектром, если импульсный генератор выдает периодическую последовательность импульсов, следующих с периодом $2\pi/\Delta\omega$, так и с непрерывным, если генератор импульсов выдает хаотическую последовательность импульсов. Применение тестового сигнала с непрерывным спектром целесо-

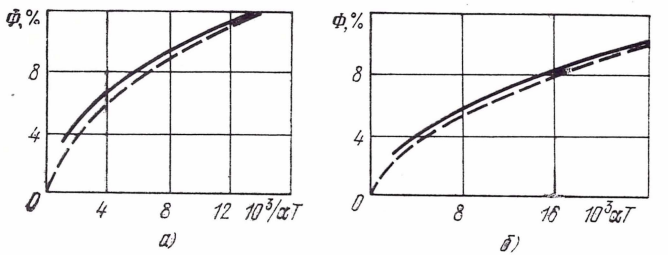


Рис. 5.3.

образно в тех случаях, когда исследуемая система имеет быстро изменяющиеся характеристики ($|dK(\omega)/d\omega|$ и $|d^2\varphi(\omega)/d\omega^2|$ велики), поскольку в противном случае необходимо брать малые $\Delta\omega$, что может привести к нежелательной форме одномерного распределения тестового сигнала

$$w(x) \approx (1-p)\,\delta(x) + \frac{p^{3/2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-px^2/2\sigma^2},$$

где σ^2 — дисперсия тестового сигнала; p — малое положительное число, уменьшающееся с уменьшением $\Delta\omega$. Нелинейные искажения сигнала с таким распределением такие же, как искажения сигнала с нормальным распределением, мощность которого в $1/p$ раз больше. Использование хаотической импульсной последовательности приближает распределение тестового сигнала к нормальному и уменьшает его нелинейные искажения.

На рис. 5,3,*а* сплошными линиями показаны результаты измерения линейных искажений сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией ($K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$) переходной RC-цепочкой с постоянной времени T. На рис. 5.3,*б* приведены результаты измерения

искажений такого же сигнала интегрирующей цепочкой с постоянной времени T. Штриховыми линиями показаны теоретические кривые, построенные по результатам решения примеров 5.1 и 5.3.

Сигнал с экспоненциальной корреляционной функцией имеет энергетический спектр $S(\omega)=\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$, поэтому линейные фильтры в схеме на рис. 5.2 должны иметь частотные характеристики $K_{\Phi}(\omega)=1/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$, что легко обеспечивается интегрирующими цепочками с постоянной времени $1/\alpha$.

Превышение экспериментальных значений над теоретическими легко объясняется аддитивным шумом (фон переменного тока, собственный шум), влияние которого увеличивается с уменьшением уровня тестового сигнала, уменьшавшегося при проведении эксперимента с увеличением αT в первом случае и с уменьшением αT во втором.

Следует отметить, что для измерения линейных искажений сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией не понадобилась специально изготавливаемая аппаратура. Достаточно было генератора парных импульсов, выполняющего функции генератора импульсов и линии задержки, и квадратичного милливольтметра.

Для уменьшения нелинейных искажений тестового сигнала можно использовать сигнал с двумя возможными уровнями. Однако такой телеграфный сигнал (см. рис. 3.18) обязательно содержит короткие (теоретически мгновенные) скачки и его спектр широкополосен. Как показано, например, в [35], такой сигнал имеет экспоненциальную автокорреляционную функцию. Поэтому такой сигнал применим для измерения линейных искажений сигналов с корреляционными функциями, близкими к экспоненциальным. Задержка телеграфного сигнала может быть сведена к задержке импульсов стандартной формы.

Глава 6

КОМБИНИРОВАННЫЕ ИСКАЖЕНИЯ

В предыдущих главах рассматривались идеализированные случаи, когда в исследуемой системе имеются искажения только одного вида. Это соответствует сложившейся практике расчета искажений каждого вида, но не позволяет в общем случае рассчитать суммарные искажения сигнала в исследуемой системе. В данной главе, не претендуя на полноту освещения этого вопроса, рассмотрим некоторые частные случаи, когда однозначная идентификация искажений не очевидна, хотя в окончательных результатах для оценки искажений иногда можно выделить слагаемые, обусловленные отдельными искажающими факторами. При этом из-за сложности аналитических выкладок ограничимся среднеквадратичным критерием, т. е. для видеотрактов будем считать

$$\Phi = \sqrt{\frac{\overline{x^2(t)}\,\left[\overline{y^2(t)} - \overline{y(t)}^2\right]}{\max\limits_{\tau}\left[\overline{x(t-\tau)\,y(t)}\right]^2} - 1},$$

для электроакустических систем в соответствии с (2.16)

$$\Phi = \sqrt{\frac{\int\limits_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega \int\limits_0^\infty S_y(\omega)\,d\omega}{\left[\int\limits_0^\infty |S_{xy}(\omega)|\,d\omega\right]^2} - 1}.$$

Входной сигнал в обоих случаях полагаем стационарным случайным процессом с нулевым средним. Обобщения на нестационарные случаи с отличным от нуля математическим ожиданием не вызывает принципиальных изменений, приводя лишь к увеличению кратности интегралов и включению дополнительных слагаемых в приводимые формулы. Еще более простым с точки зрения написания общих соотношений, но отнюдь не с точки зрения объема вычислений, будет случай полностью известного сигнала, когда, как и при расчете линейных искажений, возможно применение и других критериев отличия сигналов и запись продуктов искажений в явном виде.

6.1. Искажения сигнала при восстановлении его по дискретным отсчетам

В соответствии с теоремой Котельникова сигнал $x(t)$, энергетический спектр которого отличен от нуля в полосе частот $[-f_в, f_в]$, можно полностью восстановить по его отсчетам $x_i = x(iT)$ $(i = -\infty, \infty)$, следующим через интервал времени

$$T \leqslant 1/2f_в. \tag{6.1}$$

Точное восстановление сигнала по его отсчетам возможно при выполнении двух идеализированных предположений: 1) в соответствии с формулировкой теоремы спектр сигнала $x(t)$ финитен; 2) алгоритм восстановления сигнала эквивалентен предположению о наличии на приемной стороне идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с комплексным коэффициентом передачи

$$\dot{\widetilde{K}}_{фнч}(\omega) = \begin{cases} ke^{-j\omega t_0}, & |\omega| \leqslant 2\pi f_в, \\ 0, & |\omega| > 2\pi f_в. \end{cases}$$

Эти условия для реальных сигналов и систем могут выполняться лишь приближенно, поскольку первое условие противоречит условию (5.20), которому удовлетворяют все реальные сигналы — переносчики информации, а второе предположение противоречит условию физической реализуемости линейного фильтра (5.21). Теоретически такой фильтр можно построить только при $t_0 = \infty$, что соответствует бесконечно большой задержке восстановленного сигнала $y(t)$. Поэтому восстановление $x(t)$ по x_i без искажений невозможно. Оценим эти искажения, используя единый метод.

Рассмотрим сигнал

$$z(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Tx(iT)\,\delta(t - iT) = x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} T\delta(t - iT) =$$

$$= x(t) + 2\sum_{i=1}^{\infty} x(t) \cos \frac{2\pi i}{T} t = x(t) + \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t),$$

который определяется отсчетами x_i и в результате фильтрации которого получают сигнал $y(t) \approx x(t)$.

Энергетический спектр

$$S_z(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} S_x\left(\omega - \frac{2\pi i}{T}\right) = S_x(\omega) + \sum_{i=1}^{\infty} S_{z_i}(\omega), \qquad (6.2)$$

где

$$S_{z_i}(\omega) = S_x\left(\omega - \frac{2\pi i}{T}\right) + S_x\left(\omega + \frac{2\pi i}{T}\right).$$

Формула (6.2) справедлива для всех сигналов $x(t)$ с финитным спектром, если выполняется условие (6.1) и для нормальных процессов $x(t)$ с любым спектром при любом T.

Сигнал $y(t)$ на выходе реального ФНЧ можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

где $y_i(t)$ — результат фильтрации $z_i(t)$, при этом $z_0(t) = x(t)$.

Тогда ошибка восстановления

$$\varepsilon(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = [y_0(t) - \tilde{y}(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t).$$

При определении идеальной системы как в соответствии с (1.2), так и в соответствии с (1.3) спектр сигнала $\tilde{y}(t)$ отличается от нуля только для тех же частот, что и спектр $x(t)$. Поэтому сигналы $y_0(t) - \tilde{y}(t)$ и $y_i(t)$ некоррелированы при выполнении условий применимости формулы (6.2). Тогда

$$F = \overline{[y_0(t) - \tilde{y}(t)]^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y^2{}_i(t)}.$$

От варьируемых параметров идеальной системы зависит только слагаемое $\overline{[y_0 - \tilde{y}]^2}$, которое после минимизации F совпадает с мощностью продуктов линейных искажений сигнала $x(t)$ в ФНЧ. Слагаемое $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{y^2{}_i(t)}$ обусловлено неполным подавлением $y_i(t)$ в ФНЧ, и его можно трактовать как мощность специфических продуктов искажений из-за дискретизации сигнала. Учитывая, что спектр $S_{y_i}(\omega) = K^2_{\text{фнч}} S_{z_i}(\omega)$ сигнала $y_i(t)$, окончатель-

но получаем

$$\Phi = \sqrt{\Phi^2_{\text{фнч}} + \Phi^2_{\text{д}}}, \tag{6.3}$$

где $\Phi_{\text{фнч}}$ — линейные искажения сигнала $x(t)$ в ФНЧ, задаваемые в зависимости от определения идеальной системы (5.10) или (5.12);

$$\Phi_{\text{д}} = \sqrt{2\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K^2_{\text{фнч}}(\omega)\, S_x\left(\omega - \frac{2\pi i}{T}\right) d\omega / k^2_0 \int_0^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega}$$

для обоих определений идеальной системы.

Таким образом, в силу линейности оператора $y(t) = \mathcal{A}\{x(t)\}$ для оценки искажений по среднеквадратичному критерию достаточно знать энергетический спектр передаваемого сигнала. Поэтому для измерения искажений сигнала в системах с временно́й дискретизацией применимы те же тестовые сигналы и те же схемы, что и для измерения линейных искажений. При этом в структурной схеме на рис. 5.2 для устранения биений частота дискретизации и частота следования импульсов должны быть взаимно-простыми.

Используя (6.3), можно найти оптимальное значение параметров реальных ФНЧ, которые обеспечивают минимум искажений, а также, учитывая реальный вид $S_x(\omega)$ и $K_{\text{фнч}}$, определить минимально возможную частоту дискретизации, при которой искажения и время задержки не превышают допустимых значений.

Пример. 6.1 Рассмотрим простейший случай, когда сигнал $x(t)$ имеет спектр $S_x(\omega) = 2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$, а в качестве ФНЧ используется интегрирующая RC-цепочка с постоянной времени $T_{\text{фнч}}$. Идеальная система определена (1.2).

В этом случае из решения примера 5.3 имеем

$$\Phi_{\text{фнч}} = 0{,}63\sqrt{\alpha T_{\text{фнч}}} \text{ при } \tau_0 = T_{\text{фнч}} \ln 2;$$

$$\overline{y^2_i(t)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2_{\text{фнч}}(\omega)\, S_x\left(\omega - \frac{2\pi i}{T}\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + T^2_{\text{фнч}}\omega^2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega^2 - 2\pi i/T)^2}\, d\omega =$$

$$= \frac{(1-a)\,[1 - (a^2 + b^2_i)] + 2b_i}{[1 - (a^2 + b^2_i)]^2 + 4b_i} \approx \frac{1}{1 + b^2_i} \approx \frac{1}{b^2_i},$$

где $a = \alpha T_{\text{фнч}}$; $b_i = iT/2\pi T_{\text{фнч}}$.

Первое приближенное равенство записано в предположении, что $a \ll 1$, что соответствует малости линейных искажений фильтра, а второе в предположении $b_i \gg 1$, что означает малость искажений из-за дискретизации. Учитывая зависимость $\overline{y^2_i(t)}$ от i, можно ограничиться рассмотрением только $\overline{y^2_1(t)}$, поскольку с ростом i вклад $\overline{y^2_i(t)}$ в мощность продуктов искажений уменьшается достаточно быстро. Таким образом,

$$\Phi = \sqrt{0{,}4\alpha T_{\text{фнч}} + T^2/4\pi^2 T_{\text{фнч}}}.$$

Минимальными искажения будут при $T_{\text{фнч}} \approx 0{,}5 \sqrt[3]{T^2/\alpha}$, когда $\Phi_{\text{мин}} \approx 0{,}55 \sqrt[3]{\alpha T}$. Поэтому, чтобы искажения рассматриваемого сигнала при восстановлении его по дискретным отсчетам не превышали допустимого значения $\Phi_{\text{доп}}$, период отсчетов должен удовлетворять условию $T \leqslant 6\Phi^3_{\text{доп}}/\alpha$. При этом

$$\tau_0 = T_{\text{фнч}} \ln 2 \approx 0{,}35 \sqrt[3]{T^2/\alpha}.$$

6.2. Искажения сигнала из-за нестабильности скорости записи и воспроизведения

При записи и воспроизведении сигнала $x(t)$ выходной сигнал $y(t)$ можно представить в виде

$$y(t) = x\left[\int_0^t v(\theta)\, d\theta\right], \qquad (6.4)$$

где $v(\theta)$ — флуктуирующая случайным образом скорость, не зависящая от сигнала $x(t)$.

При исследовании систем запись — воспроизведение аргументы t и θ, являясь временем, имеют одинаковый физический смысл. Однако при преобразовании информации из одной формы в другую (например, графической в электрическую или наоборот), а также при исследовании искажений только при записи или только при воспроизведении эти аргументы будут иметь различную физическую природу. Причиной искажений при таком преобразовании сигнала будет детонация — нестабильность $v(\theta)$. Ее обычно характеризуют максимальным отклонением скорости от среднего значения или дисперсией [15, 75].

В [44] отмечается принципиальное отличие искажений при записи от искажений при воспроизведении, поскольку во втором случае соотношение (6.4) выполняется точно, а в первом приближенно. Однако в предполо-

жении малости искажений этим отличием можно пренебречь и положить

$$v(\theta) \approx \frac{v_{\text{вп}}(\theta)}{v_{\text{зп}}(\theta)} \approx \frac{\overline{v_{\text{вп}}}}{\overline{v_{\text{зп}}}} + \frac{\delta v_{\text{зп}} + \delta v_{\text{вп}}}{\overline{v}_{\text{зп}}},$$

где $v_{\text{зп}}(\theta)$, $v_{\text{вп}}(\theta)$ — скорости записи и воспроизведения соответственно; $\delta v_{\text{зп}}(\theta)$, $\delta v_{\text{вп}}(\theta)$ — отклонения этих скоростей от средних значений. Первое приближенное равенство записано в предположении $\sigma^2_v \ll \overline{v}^2$, второе — в предположении $\overline{v}_{\text{зп}} \approx \overline{v}_{\text{вп}}$.

Линейное преобразование (6.4) можно считать безынерционным, поскольку значение $y(t)$ определяется значением $x(t)$ только в один момент времени. Однако эта безынерционность иного характера, чем безынерционность преобразований (3.1), (4.1) и (4.12), в частности она допускает изменение временно́го масштаба. Поэтому идеальную систему для видеотрактов определим следующим образом [68]:

$$\tilde{y}(t) = kx(\gamma t - \tau) + a. \tag{6.5}$$

Процесс $y(t)$ даже при стационарном $x(t)$ будет нестационарным из-за нестационарности интеграла

$$s(t) = \int_0^t v(\theta)\, d\theta,$$

хотя несмотря на это, все одномерные характеристики (в частности, дисперсия и математическое ожидание) не будут зависеть от времени. Поэтому будем предполагать, что сигнал записывается в течение интервала времени $[0; T]$, и усреднять по времени необходимо на этом интервале.

Выражение для оценки искажений после минимизации по a и k с учетом того, что $\overline{y^2(t)} = \overline{x^2(t)}$, примет вид

$$\Phi = \sqrt{\frac{\sigma^4_x}{[\overline{y(t)\, x(\gamma_0 t - \tau_0)}]^2} - 1},$$

где σ^2_x — дисперсия $x(t)$.

Усреднять $y(t)\, x_1^*(\gamma t - \tau)$ необходимо по времени и по множествам x и v, т. е.

$$D = \overline{y(t)\, x_1^*(\gamma t - \tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T M_{vx}\{x[s(t)]\, x(\gamma t - \tau)\}\, dt,$$

где индексы у оператора математического ожидания $M\{\cdot\}$ показывают, по какому случайному аргументу производится усреднение.

В силу независимости $x(t)$ и $v(t)$, а следовательно, и $x(t)$ и $s(t)$, усреднять по x и v можно в любом порядке независимо друг от друга. Усредняя $y(t)x(\gamma t-\tau)$ сначала по $x(t)$, получаем

$$D=\frac{1}{T}\int_0^T M_s\{K_x[s(t)-\gamma t+\tau]\}\,dt,$$

где $K_x(\theta)$ — автокорреляционная функция процесса $x(t)$.

При определении D можно воспользоваться аналитическим выражением для $K_x(\theta)$. Однако, учитывая малость искажений, что приводит к малости $|s(t)-\gamma t+\tau|$, $K_x(\theta)$ можно разложить в ряд. При этом необходимо рассмотреть два случая.

Процесс $x(t)$ дифференцируем. Реальные процессы всегда удовлетворяют этому условию и для них $K'_x(0)=0$, поэтому приближенно можно считать

$$K_x(\theta)=K_x(0)+\theta^2K''_x(0)/2=\sigma^2_x[1+R''_x(0)\,\theta^2/2],$$

где $R_x(\theta)=K_x(\theta)/\sigma^2_x$ — коэффициент корреляции $x(t)$. Тогда

$$D=\sigma^2_x\left\{1+\frac{R''_x(0)}{2T}\int_0^T M_v\{[s(t)-\gamma t+\tau]^2\}\,dt\right\}=$$

$$=\sigma^2_x\left\{1+\frac{R''_x(0)}{2T}\int_0^T\{\sigma^2_s(t)+[m_s(t)-\gamma t+\tau]^2\}\,dt\right\},$$

где

$$m_s(t)=\int_0^t m_v(\theta)\,d\theta$$

— математическое ожидание $s(t)$:

$$\sigma^2_s(t)=\int_0^t\int_0^t K_v(\theta_1;\ \theta_2)\,d\theta_1 d\theta_2$$

— его дисперсия; m_v, K_v — математическое ожидание и автокорреляционная функция $v(\theta)$.

Для расчета искажений необходимо найти γ_0 и τ_0, обеспечивающие максимум D или, поскольку $R''_x(0) < 0$, минимум

$$\int_0^T M_v \{[s(t) - \gamma t + \tau]\}^2 dt,$$

что эквивалентно поиску наилучшей линейной аппроксимации $s(t)$ по квадратичному критерию.

Скорость $v(\theta)$ иногда можно считать детерминированной, изменяющейся, например, по гармоническому закону. В этом случае $m_v = v(\theta)$, $K_v \equiv \sigma^2_v = 0$. Тогда

$$D = \sigma^2_x \left\{ 1 + \frac{R''_x(0)}{2T} \int_0^T [s(t) - \gamma t + \tau]^2 dt \right\}.$$

Максимум D будет достигаться при

$$\gamma_0 = \frac{12}{T^3} \int_0^T s\left(t - \frac{T}{2}\right) dt;$$

$$\tau_0 = \frac{2}{T} \int_0^T (3t - 2T)\, s(t)\, dt,$$

откуда

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{[1 + R''_x(0)\ I_1/2]^2} - 1} \approx \sqrt{-R''_x(0)\, I_1}, \quad (6.6)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t)\, dt - \left[\frac{1}{T} \int_0^T s(t)\, dt\right]^2 - \frac{12}{T^2} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) s(t)\, dt\right]^2.$$

Пример 6.2. Рассмотрим случай гармонического колебания $v(\theta)$ относительно среднего значения:

$$v(\theta) = v_0 + \Delta v \cos \Omega\theta.$$

Для упрощения получаемых результатов положим $T = 2\pi n/\Omega$, где n — целое число. При $T \gg 2\pi/\Omega$ это ограничение несущественно. Тогда

$$s(t) = v_0 t + (\Delta v/\Omega) \sin \Omega t;\ I_1 = \Delta v^2/2\Omega^2.$$

При гармоническом входном сигнале с равномерным распределением начальной фазы $R_x(\theta) = \cos \omega\theta$, $R''_x(0) = -\omega^2$ и $\Phi = \omega \Delta v / \sqrt{2\Omega}$, что совпадает с действующим значением продуктов паразитной частотной модуляции, отнесенным к действующему зна-

чению полезного сигнала в предположении малости индекса модуляции, что совпадает с предположением о малости искажений. Таким образом, и в этом случае применяемые методы оценки искажений оказываются частными случаями единого метода.

Если $x(t)$ имеет равномерный энергетический спектр, ограниченный полосой частот $[-\omega_0; \omega_0]$, то

$$R_x(\theta) = (\sin \omega_0 \theta)/\omega_0 \theta; \; R''_x(0) = -\omega^2_0/3;$$
$$\Phi = \omega_0 \Delta v / \sqrt{6\Omega}.$$

Если скорость $v(\theta)$ рассматривать как стационарный случайный процесс, целесообразность чего отмечают, например, авторы [15, 75], то

$$m_s(t) = m_v t; \; \sigma^2_s(t) = 2 \int_0^t (t - \theta) K_v(\theta) \, d\theta.$$

Для всех t $[(m_v - \gamma) t + \tau]^2 = 0$ при $\gamma_0 = m_v$ и $\tau_0 = 0$, что обеспечивает максимум D. Тогда аналогично (6.6) получаем

$$\Phi = \sqrt{-R''_x(0) I_2}, \tag{6.7}$$

где

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2_s(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (T - t)^2 K_v(t) \, dt.$$

Пример 6.3. Пусть $K_v(\theta) = \sigma^2_v e^{-\beta |\theta|}$. Тогда

$$I_2 = \frac{\sigma^2_v}{T} \int_0^T (T - t)^2 e^{-\beta t} \, dt =$$

$$= 2\sigma^2_v \left(\frac{1 - e^{-\beta T}}{T\beta^3} + \frac{T}{2\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right).$$

При малых $T\beta$

$$\Phi \approx \sigma_v \sqrt{-R''_x(0)} \, T/\beta,$$

откуда получаем для синусоидального сигнала

$$\Phi \approx \sigma_v \omega \sqrt{T/\beta},$$

а для сигнала с равномерным спектром

$$\Phi \approx \sigma_v \omega_0 \sqrt{T/3\beta}.$$

Таким образом, согласно (6.6) и (6.7) для расчета искажений дифференцируемого процесса необходимо знать величину $-R''_x(0)$, которую можно трактовать как

отношение дисперсии производной записываемого процесса к дисперсии самого процесса. Кроме того, необходимо знать аналитическое выражение для скорости, если ее рассматривают как детерминированную функцию, или автокорреляционную функцию скорости, если ее рассматривают как случайный процесс.

Процесс $x(t)$ недифференцируем. Если корреляционную функцию реального процесса описывать недифференцируемой моделью, например, $K_x(\theta)=\sigma^2_x e^{-\alpha|\theta|}$, то $K'_x(0)$ будет иметь разрыв в нулевой точке. Практически такие модели приходится применять в тех случаях, когда $K'_x(0)$ в окрестности нулевой точки равна нулю, но уже при малых $|\theta|$ $K_x|\theta|$ начинает быстро убывать (рис. 6.1, где $K_x(\theta)$ — реальная автокорреляционная функция, $\tilde{K}_x(\theta)$ — модель). Тогда необходимо воспользоваться иным разложением:

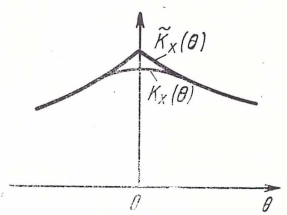


Рис. 6.1.

$$K_x(\theta)\cong\sigma^2_x+K'_x(+0)|\theta|=\sigma^2_x[1+R'_x(+0)|\theta|],$$

при этом

$$D=\sigma^2_x\left\{1+\frac{R'_x(+0)}{T}\int_0^T M_v[|s(t)-\gamma t+\tau|]\,dt\right\}.$$

Для детерминированных колебаний скорости операция вычисления математического ожидания по v отпадает и аналогично (6.6)

$$\Phi=\sqrt{-2R'_x(+0)I_3}, \tag{6.8}$$

где

$$I_3=\min_{\gamma,\tau}\frac{1}{T}\int_0^T|s(t)-\gamma t+\tau|\,dt.$$

Методика вычисления I_3 очевидна, хотя и громоздка.

В этом случае расчет искажений сводится к наилучшей линейной аппроксимации $s(t)$ по среднемодульному критерию.

Пример 6.4. Пусть, как и в примере 6.2, скорость изменяется по гармоническому закону. Тогда

$$I_3 = \min_{\gamma,\,\tau} \frac{1}{T} \int_0^T \left| (v_0 - \gamma)\, t + \tau + \frac{\Delta v}{\Omega} \cos \Omega t \right| dt.$$

Минимум интеграла при сделанных ранее допущениях о T и Ω достигается при $\tau_0 = 0$ и $\gamma_0 = v_0$. При этом

$$I_3 = 2\Delta v / \pi\Omega$$

и

$$\Phi = 2\sqrt{-R'_x\,(+0)\;\Delta v / \pi\Omega}.$$

Для сигнала с экспоненциальной корреляционной функцией

$$R_x\,(\theta) = e^{-\alpha|\theta|}, \quad R'_x\,(+0) = -\alpha$$

и

$$\Phi = 2\sqrt{\alpha \Delta v / \pi\Omega}.$$

Если $v(\theta)$ трактовать как стационарный случайный процесс, то, учитывая его нормализацию при узкополосном преобразовании, каким является интегрирование, $s(t)$ можно считать распределенным нормально, поэтому

$$M_v[\,|\,s(t) - \gamma t + \tau\,|\,] = |\,(m_v - \gamma)t + \tau\,| + \sigma_s(t)/\sqrt{2\pi},$$

и, как и при выводе (6.7), значение D будет максимально при $\tau_0 = 0$ и $\gamma_0 = m_v$. Тогда

$$\Phi = \sqrt{-\sqrt{2/\pi}\, R'_x(0)\, I_4}, \tag{6.9}$$

где

$$I_4 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s(t)\, dt.$$

Пример 6.5. Рассчитаем искажения, если $v(\theta)$ имеет треугольную автокорреляционную функцию, т. е.

$$K_v(\theta) = \begin{cases} \sigma^2_v\,(1 - |\theta|/\tau_к), & |\theta| \leqslant \tau_к, \\ 0, & |\theta| > \tau_к. \end{cases}$$

В этом случае

$$\sigma^2_s(t) = 2 \int_0^t (t - \theta)\, K_v(\theta)\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \sigma^2_v t^2\,(1 - t/3\tau_к), & t \leqslant \tau_к, \\ \sigma^2_v \tau^2_к \left(\dfrac{t}{\tau_к} - \dfrac{1}{3} \right), & t > \tau_к, \end{cases}$$

и при $T \geqslant \tau_к$

$$I_4 = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_s(t)\,dt = \frac{\sigma_v \tau_к^2}{T}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{T}{\tau_к}-\frac{1}{3}\right)^{3/2} - \right.$$

$$\left. -\frac{128}{45}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{12}{5}\right].$$

При $T \gg \tau_к$

$$I_4 \approx 2/3\sigma_v \sqrt{T\tau_к};$$

$$\Phi = \sqrt{-2R'_x(+0)\,\sigma_v \frac{\sqrt{2T\tau_к/\pi}}{3}}.$$

Если $R_x(\theta) = e^{-\alpha|\theta|}$, то

$$\Phi \approx \sqrt{2\alpha\sigma_v \frac{\sqrt{2T\tau_к/\pi}}{3}}.$$

При исследовании электроакустических систем идеальное преобразование можно определить в соответствии с (1.3), куда вместо $x(t)$ следует подставить $x(\gamma t)$. Тогда с учетом того, что $S_{\underset{\sim}{y}} = \gamma S_x(\gamma\omega)$, считая случайной только фазовую структуру $x(t)$, получаем

$$\Phi = \sqrt{\frac{\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega \int_0^\infty S_y(\omega)\,d\omega}{\left[\max_\gamma \int_0^\infty \sqrt{\gamma S_x(\gamma\omega)\,S_y(\omega)}\,d\omega\right]^2} - 1}.$$

Определение $S_y(\omega)$ — в общем случае достаточно сложная задача. При $v(t)$, изменяющейся намного медленнее $x(t)$, можно применить квазистационарный метод и считать

$$S_y(\omega) = M_v\{v(t)\,S_x[v(t)\,\omega]\}.$$

С учетом этого

$$\int_0^\infty S_y(\omega)\,d\omega = M_v\left\{\int_0^\infty v(t)\,S_x[v(t)\,\omega]\,d\omega\right\} = \int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega.$$

Для вычисления

$$L = \int_0^\infty M_v\{\sqrt{\gamma v(t)\,S_x(\gamma\omega)\,S_x[v(t)\,\omega]}\}\,d\omega$$

необходимо знать одномерное распределение $v(t)$. Для стационарных флуктуаций скорости при непрерывном $S_x(\omega)$ в предположении малости искажений можно записать

$$L=\int_0^\infty M_v\left\{S_x(\omega)+\frac{\delta}{2}[S_x(\omega)+\omega S'_x(\omega)]+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta^2}{8}\left[2\omega^2 S''_x(\omega)+2\omega S'_x(\omega)-\frac{\omega^2 S'^2_x(\omega)}{S_x}-S_x(\omega)\right]\right\}d\omega,$$

где $\delta=[v(t)-\gamma]/\gamma$.

Энергетические спектры реальных сигналов убывают достаточно быстро с ростом ω, поэтому можно положить

$$\int_0^\infty \omega^k S_x^{(k)}(\omega)\,d\omega=(-1)^k k!\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega.$$

С учетом этого

$$L=\int_0^\infty\left\{S_x(\omega)-\frac{M_v[\delta^2]}{8}\left[\frac{\omega^2 S'^2_x(\omega)}{S_x(\omega)}-S_x(\omega)\right]\right.d\omega.$$

Можно показать, что интеграл от выражения в квадратных скобках не может быть отрицательным. Поэтому L будет максимальным, если

$$M_v\left\{\left[\frac{v(t)-\gamma}{\gamma}\right]^2\right\}=\frac{\sigma_v^2+(\bar v-\gamma)^2}{\gamma^2}=\min_\gamma.$$

При $\sigma_v\ll\bar v$ это условие будет выполняться, если $\gamma_0=\bar v$. Тогда, подставляя полученное значение $L_{\text{мин}}$ в формулу для Ф, получаем

$$\Phi=\frac{\sigma_v}{2\bar v}\sqrt{\frac{\int_0^\infty \frac{\omega^2 S'^2_x(\omega)}{S_x(\omega)}\,d\omega}{\int_0^\infty S_x(\omega)\,d\omega}}-1. \qquad (6.10)$$

Согласно (6.10) степень искажений зависит от отношения среднеквадратичного уклонения флуктуаций скорости к ее среднему значению и от скорости изменения спектра записываемого сигнала.

Пример 6.6. Пусть

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2 x}{\sqrt{2\pi\eta}} e^{-\omega^2/2\eta}.$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{\omega^2 [S'_x(\omega)]^2}{S_x(\omega)} d\omega = \frac{3}{2}\sigma^2 x;$$

$$\int_0^\infty S_x(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}\sigma^2 x,$$

и

$$\Phi = \sigma_v / \sqrt{2}\,\overline{v}.$$

6.3. Линейные системы с флуктуирующими параметрами

Пусть линейной системе соответствует оператор общего вида (5.1), где импульсная реакция $h(t;\ \theta)$ является детерминированной функцией относительно θ и случайной, не зависящей от $x(t)$, по отношению к t.

Частным случаем такой импульсной реакции является оператор (4.12), когда $h(t;\ \theta) = c(t)\delta(\theta)$. Другой частный случай $h(t,\ \theta) = c(t)h(\theta)$ соответствует каскадному соединению стационарной линейной системы с импульсной реакцией $h(\theta)$ и устройства с мультипликативным шумом $c(t)$. В этом случае расчет суммарных искажений легко сводится к раздельному анализу линейных и шумовых искажений. В общем случае непосредственно по виду оператора (5.1) разделить искажения на шумовые и линейные трудно.

Аналогично выводу (5.6) имеем

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{\left[\int_0^\infty x(t-\theta)\, h(t;\ \theta)\, d\theta - kx(t-\tau)\right]^2} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \overline{x(t-\theta_1)\, x(t-\theta_2)\, h(t;\ \theta_1)\, h(t;\ \theta_2)}\, d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+ k^2\overline{x^2(t)} - 2k\int_0^\infty \overline{x(t-\theta)\, x(t-\tau)\, h(t;\ \theta)}\, d\theta,$$

причем

$$\overline{x(t-\theta)\,x(t-\tau)\,h(t;\ \theta)}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}M_{xh}\{x(t-\theta)\,x(t-\tau)\,h(t;\ \theta)\}\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_x(t-\theta;\ t-\tau)\,m_h(t;\ \theta)\,dt,$$

$$\overline{x(t-\theta_1)\,x(t-\theta_2)\,h(t;\ \theta_1)\,h(t;\ \theta_2)}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}K_x(t-\theta_1;\ t-\theta_2)\,B_h(t;\ \theta_1;\ \theta_2)\,dt,$$

где K_x — автокорреляционная функция $x(t)$; $m_h(t;\ \theta)=$ $=M\{h(t;\ \theta)\}$ — математическое ожидание $h(t;\ \theta)$; $B_h(t;$ $\theta_1;\ \theta_2)=M\{h(t:\ \theta_1)\,h(t;\ \theta_2)\}$.

Если $x(t)$ и $h(t;\ \theta)$ являются стационарными случайными процессами, полученные формулы упрощаются:

$$\overline{x(t-\theta)\,x\ (t-\tau)\,h(t;\ \theta)}=K_x(\theta-\tau)\,m_h(\theta);$$

$$\overline{x(t-\theta_1)\,x(t-\theta_2)\,h(t;\ \theta_1)\,h(t;\ \theta_2)}=$$
$$=K_x(\theta_1-\theta_2)\,B_h(\theta_1;\ \theta_2).$$

Допустим, что функция $h(t;\ \theta)$ при изменении t меняется намного медленнее, чем при изменении θ. Это эквивалентно предположению о том, что мультипликативный шум изменяется намного медленнее передаваемого сигнала. Тогда, применяя квазистационарный метод, можно проводить анализ в частотной области, используя зависящий от времени комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\omega;\ t)=\int_{0}^{\infty}h(t;\ \theta)\,e^{-j\omega\theta}d\theta.$$

При этом

$$\overline{y^2(t)}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_x(\omega)\,\overline{K^2(\omega;\ t)}\,d\omega;$$

$$\overline{x(t-\tau)\,y(t)}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_x(\omega)\,\mathrm{Re}\,\{\overline{\dot{K}(\omega;\ t)}\,e^{-j\omega\tau}\}\,d\omega,$$

где $$\overline{K^2(\omega;\ t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} M_h\{K^2(\omega;\ t)\}\, dt;$$

$$\overline{\dot{K}(\omega;\ t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} M_h\{\dot{K}(\omega;\ t)\}\, dt.$$

Таким образом, для расчета искажений сигнала в линейной системе с флуктуирующими параметрами необходимо знать средние значения характеристик линейной системы и средние значения их квадратов, которые можно легко выразить через вероятностные характеристики соответствующих флуктуирующих параметров. Для стационарных флуктуаций достаточно знать их одномерное распределение.

Если линейная система параметрическая, т. е. $h(t;\ \theta)$ — детерминированная функция своих аргументов, и зависимость h от t нежелательна, то все приведенные формулы остаются в силе, только отпадает необходимость усреднения по h.

Пример 6.7. Пусть выполнены условия примера 5.1, но постоянная времени переходной цепочки медленно флуктуирует. Причем эти флуктуации можно считать стационарным процессом с равномерным распределением на интервале $[T_1, T_2]$. Таким образом,

$$\dot{K}(\omega;\ t) = \frac{j\omega T(t)}{1 + j\omega T(t)};\quad S(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Тогда для всех T в соответствии с результатами примера 5.1 $\overline{x(t-\tau)\, y(t)}$ максимально при $\tau_0 = 0$ и

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\, d\omega dT =$$

$$= 1 - \frac{\ln[(1 + \alpha T_2)/(1 + \alpha T_1)]}{\alpha (T_2 - T_1)};$$

$$\overline{x(t)\, y(t)} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{j\omega T}{1 + j\omega T}\right\} d\omega dT =$$

$$= 1 - \frac{\ln[(1 + \alpha T_2)/(1 + \alpha T_1)]}{\alpha (T_2 - T_1)};$$

$$\Phi = \sqrt{\left[\frac{\alpha (T_2 - T_1)}{\ln[(1 + \alpha T_2)/(1 + \alpha T_1)]} - 1\right]^{-1}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{\alpha T} + \frac{1}{2\alpha T}\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где $T = (T_1 + T_2)/2$; $\Delta T = T_2 - T_1$.

При $\Delta T=0$ полученные результаты совпадают с результатами примера 5.1. В остальных случаях при равенстве T искажения сигнала при наличии флуктуаций будут больше.

Полученный результат можно представить в форме

$$\Phi = \sqrt{\Phi^2_{л} + \Phi^2_{ш}},$$

где $\Phi_{л}$ — оценка линейных искажений при нефлуктуирующем коэффициенте передачи; $\Phi_{ш} = \Delta T / T \sqrt{2\alpha T}$ — составляющая искажений, обусловленная мультипликативным шумом.

6.4. Искажения сигнала в типовом радиотехническом звене

Рассмотрим искажения сигнала в одной простейшей нелинейной инерционной системе, представляющей каскадное соединение линейного устройства с импульсной реакцией $h_1(\theta)$, нелинейного безынерционного устройства с характеристикой $r=f(z)$ и оконечного линейного устройства с импульсной реакцией $h_2(\theta)$ (рис. 6.2). Такая система, называемая типовым радиотехническим звеном (ТРЗ) [36], может служить первым приближением

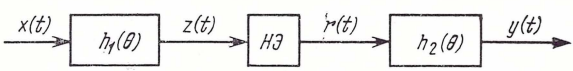


Рис. 6.2.

к более сложным реальным системам. При этом, как и ранее, считаем, что нелинейность нежелательна, поскольку является причиной искажений (в отличие от тех систем, когда нелинейность вводится преднамеренно, например при детектировании сигнала).

Не делая каких-либо предположений о характере сигнала $x(t)$, кроме предположения о его стационарности, получить решение в общем виде можно только для полиномиальных характеристик $f(z)$, когда

$$z(t) = \int_0^\infty x(t-\theta')\, h_1(\theta')\, d\theta';$$

$$r(t) = f[z(t)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z^i(t);$$

$$y(t)=\int_0^\infty r(t-\theta'')\,h_2(\theta'')\,d\theta''=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_0^\infty\left[\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\prod_{\nu=1}^{i}x(t-\theta''-\theta'_\nu)\times\right.$$

$$\left.\times h_1(\theta'_\nu)\,d\theta'_\nu\right]h_2(\theta'')\,d\theta''.$$

Считая, что идеальная система определена (1.2), имеем

$$\overline{y(t)}=K_2(0)\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\int_0^\infty\dots\int_0^\infty K_i(\theta'_1;\dots;\theta'_i)\prod_{\nu=1}^{i}h_1(\theta'_\nu)\,d\theta'_\nu;$$

$$\overline{x(t-\tau)\,y(t)}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_0^\infty h_2(\theta'')\left[\int_0^\infty\dots\int_0^\infty K_{i+1}(\theta''+\right.$$

$$\left.+\theta'_1;\dots;\theta''+\theta'_i;\ \tau)\prod_{\nu=1}^{i}h_1(\theta'_\nu)\,d\theta'_\nu\right]d\theta''=$$

$$=\alpha_1\int_0^\infty K_x(t-\theta)\,h(\theta)\,d\theta+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\int_0^\infty h_2(\theta'')\,N_i(\theta''-\tau)\,d\theta'';$$

$$\overline{y^2(t)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\int_0^\infty\int_0^\infty h_2(\theta''_1)\,h_2(\theta''_2)\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty\dots\int_0^\infty K_{i+j}(\theta''_1+\theta'_1;\dots;\theta''_1+\theta'_i;\ \theta''_2+\right.$$

$$\left.+\theta'_{i+1};\dots;\theta''_2+\theta'_{i+j})\prod_{\nu=1}^{i+j}h_1(\theta'_\nu)\,d\theta'_\nu\right]d\theta''_1d\theta''_2=$$

$$=\alpha^2{}_1\int_0^\infty\int_0^\infty K_x(\theta_1-\theta_2)\,h(\theta_1)\,h(\theta_2)\,d\theta_1d\theta_2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'}\alpha_i\alpha_j\int_0^\infty\int_0^\infty R_{i+j}(\theta''_2-\theta''_1)h_2(\theta_1'')h_2(\theta''_2)\,d\theta''_1d\theta''_2,\quad(6.11)$$

где $h(\theta)=h_1(\theta)\ast h_2(\theta)$ — импульсная реакция каскадно соединенных линейных устройств ТРЗ; через N_i и R_i обозначены соответствующие интегралы, стоящие в квадратных скобках; штрих у двухкратной суммы означает, что в ней отсутствует слагаемое с $i=j=1$;

$$K_q(\theta_1;\dots;\theta_q)=\overline{\prod_{\nu=1}^{q}x(t+\theta_\nu)}$$

— смешанная моментная функция входного процесса q-го порядка; при $q=2$ она совпадает с автокорреляционной функцией $x(t)$. В силу предположения о стационарности $x(t)$, K_q будут функциями только $q-1$ аргумента. Однако для сокращения записи формул (6.11) удобнее писать q аргументов.

Таким образом, для расчета искажений сигнала в ТРЗ с полиноминальной нелинейностью степени n необходимо знать первые $2n$ смешанные моментные функции входного сигнала. Наиболее просто найти эти функции для нормального $x(t)$, когда [36]

$$K_q(\theta_1; \ldots; \theta_q)=(-1)^q \left\{ \frac{\partial^q}{\partial u_1 \ldots \partial u_q} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} K_x(\theta_i - \theta_j) u_i u_j \right] \right\}_{u_1 = \ldots = u_q = 0} \qquad (6.12)$$

выражаются через $K_x(\theta)$. Из (6.12) следует, что $K_{2k+1} \equiv \equiv 0$.

Подставляя (6.11) в формулу для Ф, в предположении малости искажений получаем

$$\Phi \approx \left\{ \Phi^2_{\text{л}} + \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}{}' \alpha_i \alpha_j \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\theta''_1) h_2(\theta''_2) (R_{i+j}(\theta''_2 - \theta''_1) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - N_i(\theta''_1 - \tau_0) N_j(\theta''_2 - \tau_0)) d\theta''_1 d\theta''_2 - (\bar{y})^2 \right] \frac{1}{k^2_0 \sigma^2_x} \right\}^{1/2}, \qquad (6.13)$$

где $\Phi_{\text{л}}$ — линейные искажения сигнала в линейных частях ТРЗ, рассчитанные по формуле (5.10); второе слагаемое обусловлено нелинейностью f с учетом влияния на продукты нелинейных искажений оконечного линейного каскада.

Пример 6.8. Рассмотрим более подробно случай квадратичной нелинейности:

$$r(t) = \alpha_1 z(t) + \alpha_2 z^2(t).$$

Тогда

$$\overline{y(t)} = \alpha_2 \sigma^2_z K_2(0);$$

$$\overline{x(t-\tau)\, y(t)} = \alpha_1 \int_0^\infty \int_0^\infty K_x(\tau - \theta'' - \theta')\, h_1(\theta')\, h_2(\theta'')\, d\theta' d\theta'' +$$

$$+ \alpha_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_3(\tau - \theta'_1 - \theta''; \tau - \theta'_2 - \theta'')\, h_1(\theta'_1) \times$$

$$\times h_1(\theta'_2)\, h_2(\theta'')\, d\theta'_1 d\theta'_2 d\theta'' = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2;$$

$$\overline{y^2(t)} = \alpha^2_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_x(\theta''_1 + \theta'_1 - \theta''_2 - \theta'_2) \times$$

$$\times h_1(\theta'_1)\, h_1(\theta'_2)\, h_2(\theta''_1)\, h_2(\theta''_2)\, d\theta'_1 d\theta'_2 d\theta''_1 d\theta''_2 +$$

$$+ 2\alpha_1\alpha_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_3(\theta''_1 + \theta'_1;\ \theta''_2 + \theta'_2;\ \theta''_2 + \theta'_3) \times$$

$$\times h_1(\theta'_1)\, h_1(\theta'_2)\, h_1(\theta'_3)\, h_2(\theta''_1)\, h_2(\theta''_2)\, d\theta'_1 d\theta'_2 d\theta'_3 d\theta''_1 d\theta''_2 +$$

$$+ \alpha^2_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K_4(\theta''_1 + \theta'_1;\ \theta''_1 + \theta'_2;\ \theta''_2 + \theta'_3;\ \theta''_2 + \theta'_4) \times$$

$$\times h_1(\theta'_1)\, h_1(\theta'_2)\, h_1(\theta'_3)\, h_1(\theta'_4)\, h_2(\theta''_1)\, h_2(\theta''_2)\, d\theta'_1 d\theta'_2 \times$$

$$\times d\theta'_3 d\theta'_4 d\theta''_1 d\theta''_2 = \alpha_1 I_3 + 2\alpha_1\alpha_2 I_4 + \alpha^2_2 I_5.$$

Интеграл I_1 можно рассматривать как результат преобразования $K_x(\theta)$ линейной системой с импульсной реакцией $h(\theta) = h_1(\theta_1) \ast h_2(\theta_2)$, а интеграл I_3 дает значение дисперсии на выходе линейной системы с такой импульсной реакцией при действии на ее входе $x(t)$.

Согласно полученному результату для малых гладких несимметричных нелинейностей, когда применима линейно-квадратичная аппроксимация характеристики нелинейного элемента, в общем случае необходимо знать три первые смешанные моментные функции.

Для нормальных $x(t)$ $K_3 \equiv 0$ и $I_2 = I_4 = 0$, а

$$K_4(\theta_1;\ \theta_2;\ \theta_3;\ \theta_4) = K_x(\theta_1 - \theta_2)\, K_x(\theta_3 - \theta_4) +$$
$$+ K_x(\theta_1 - \theta_3)\, K_x(\theta_2 - \theta_4) + K_x(\theta_1 - \theta_4)\, K_x(\theta_2 - \theta_3).$$

Тогда после несложных преобразований можно записать

$$\overline{x(t-\tau)\, y(t)} = \alpha_1 \int_0^\infty K_x(\tau - \theta)\, h(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega)\, K(\omega) \cos[\psi(\omega) + \omega\tau]\, d\omega;$$

$$\overline{y^2(t)} = \alpha^2_1 \int_0^\infty \int_0^\infty K_x(\theta_1 - \theta_2)\, h(\theta_1)\, h(\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+ \alpha^2_2 \int_0^\infty \int_0^\infty K_{z^2}(\theta_1 - \theta_2)\, h_2(\theta_1)\, h_2(\theta_2)\, d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{\alpha^2_1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega)\, K^2(\omega)\, d\omega + \frac{\alpha^2_2}{\pi} \int_0^\infty S_{z^2}(\omega)\, K^2_2(\omega)\, d\omega,$$

где K_{z^2} — автокорреляционная функция квадрата сигнала $z(t)$ (для нормального $x(t)$ $K_{z^2} = 2K^2_z$);

$$S_{z^2}(\omega) = [K^2_1(\omega)\, S_x(\omega)] \ast [K^2_1(\omega)\, S_x(\omega)],$$

— спектр сигнала z^2;
$K(\omega) = K_1(\omega) K_2(\omega)$ — комплексный коэффициент передачи, соответствующий $h(\tau)$; $K_1(\omega)$ и $K_2(\omega)$ — то же для $h_1(\tau)$ и $h_2(\tau)$.

Подставляя полученные выражения в формулу для Ф, получаем

$$\Phi = \sqrt{\Phi^2_л + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \frac{\int_0^\infty S_{z^2}(\omega)\, K^2_2(\omega)\, d\omega}{\left\{\int_0^\infty S_x(\omega)\, K(\omega) \cos[\psi(\omega) + \omega\tau_0]\, d\omega\right\}^2}}.$$

Первое слагаемое полученного выражения представляет оценку линейных искажений ТРЗ в соответствии с (5.10). Второе слагаемое с небольшими отличиями совпадает с квадратом оценки нелинейных искажений безынерционного элемента по среднеквадратичному критерию с весовой функцией в частотной области (3.56). Весовая функция $Q(\omega) = K^2_2(\omega)$. Таким образом, в этом случае оценка суммарных искажений четко разделяется на составляющие, обусловленные линейными и нелинейными искажениями. Аналогичные результаты можно получить и для других характеристик.

При измерении суммарных искажений в ТРЗ с помощью тестового сигнала в общем случае необходимо сформировать случайный или почти случайный сигнал с $2n$ заданными моментными функциями. Насколько автору известно, эта задача в литературе не рассматривалась и пока не получила решения.

Рассматривая полиномиальную характеристику, мы пришли к выводу, что для расчета искажений в общем случае необходим достаточно большой объем информации о вероятностных свойствах передаваемого сигнала.

Еще более трудно найти решение, если $f(z)$ оказывается разрывной или недифференцируемой функцией. Однако для нормального входного сигнала возможно аналитическое решение в самом общем случае. Действительно, при нормальном распределении

$$\overline{x(t-\tau)\,y(t)} = \int_0^\infty K_{xr}(\tau-\theta)\,h(\theta)\,d\theta,$$

где $K_{xr}(\theta) = \overline{x(t)f[z(t-\theta)]}$ — взаимно-корреляционная функция $x(t)$ и $r(t)$.

В соответствии с теоремой Прайса [16] взаимно-корреляционная функция процессов $v_1(t) = f_1[\xi_1(t)]$ и $v_2(t) = f_2[\xi_2(t)]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^k K_{v_1 v_2}(t_1;\ t_2)}{dK^k_{\xi_1\xi_2}(t_1;\ t_2)} = M\{f_1^{(k)}[\xi_1(t_1)]\, f_2^{(k)}[\xi_2(t_2)]\},$$

где $K_{\xi_1\xi_2}$ — взаимно-корреляционная функция преобразуемых сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Тогда

$$\frac{dK_{xr}(\tau)}{dK_{xz}(\tau)} = M\{f'[z(t)]\} = \frac{\overline{z(t)\,f[z(t)]}}{\sigma^2_z} = k_{0\,\text{нл}},$$

что совпадает с эквивалентным коэффициентом передачи нелинейного элемента с характеристикой f при воздействии на него нормального процесса $z(t)$ с дисперсией σ^2_z. Таким образом, $K_{xr}(\tau) = k_{0\,\text{нл}} K_{xz}(\tau)$. Выразив K_{xz} через K_x и $h_1(\theta)$:

$$K_{xz}(\tau) = \int_0^\infty K_x(\tau-\theta)\,h_1(\theta)\,d\theta,$$

окончательно получим

$$\overline{x(t-\tau)\,y(t)} = k_{0\,\text{нл}} \int_0^\infty \int_0^\infty K_x(\tau-\theta_1-\theta_2)\,h_1(\theta_1)\,h_2(\theta_2)\,d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= k_{0\,\text{нл}} \int_0^\infty K_x(\tau-\theta)\,h(\theta)\,d\theta,$$

где, как и ранее, $h(\theta) = h_1(\theta) * h_2(\theta)$.

Эквивалентный коэффициент передачи ТРЗ

$$|k_0| = |k_{0\,\text{нл}}| \max_\tau \left| \int_0^\infty R_x(\tau-\theta)\,h(\theta)\,d\theta \right| = |k_{0\,\text{нл}}|\,|k_{0\text{л}}|$$

оказывается произведением эквивалентных коэффициентов передачи линейной и нелинейной частей системы.

Для определения $\overline{y^2(t)}$ можно воспользоваться разложением в ряд спектра сигнала $r(t)$

$$S_r(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} [\overline{f^{(i)}(z)}]^2 S_i(\omega)/i!;$$

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_r(\omega) K^2{}_2(\omega)\, d\omega,$$

где $S_i(\omega)$ — $(i-1)$-кратная свертка спектра сигнала $z(t)$ с собой.

Подставляя полученные значения в формулу для Ф, получаем

$$\Phi \approx \sqrt{\Phi^2_{\text{л}} + \Phi^2_{\text{нл}}}, \qquad (6.14)$$

где $\Phi_{\text{л}}$ — оценка линейных искажений ТРЗ в предположении, что f линейна; $\Phi_{\text{нл}}$ — оценка нелинейных искажений нормального сигнала по квадратичному критерию с весовой функцией в частотной области.

При измерении искажений нормального сигнала в ТРЗ применима структурная схема на рис. 5.2 при условии, что импульсный генератор выдает хаотическую импульсную последовательность.

При определении идеального преобразования в соответствии с (1.3) для расчета искажений необходимо знать энергетические спектры сигналов $x(t)$ и $y(t)$. При нормальном сигнале $x(t)$ определение $S_y(\omega)$ очевидно: $S_y(\omega) = K^2{}_2(\omega) S_r(\omega)$. Это же соотношение применимо и при произвольном сигнале $x(t)$. При полиномиальной характеристике f для определения $S_r(\omega)$ можно воспользоваться теоремой Винера — Хинчина:

$$S_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_r(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

где автокорреляционная функция

$$K_r(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} K_{i+j}(\theta_1; \dots; \theta_i; \theta_{i+1} + \tau; \dots; \theta_{i+j} + \tau) \prod_{\nu=1}^{i+j} h_1(\theta_\nu)\, d\theta_\nu$$

определяется теми же моментными функциями, которые были необходимы для расчета искажений в видеотрактах.

Из рассмотренных в данной главе частных случаев видно, что единый метод оценки искажений применим и для расчета сложных видов искажений, хотя объем вычислений и необходимое количество исходной информации возрастают и приходится делать ряд упрощающих предположений, применяя, например, квазистационарные методы. Однако при использовании многих других методов решение оказывается не менее сложным. При этом большинство традиционных методов в результате таких громоздких расчетов дают оценку искажений только для частных случаев, для тестовых сигналов, тогда как единый метод позволяет оценить искажения реального сигнала.

Список литературы

1. **Аналитические** самонастраивающиеся системы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение», 1965.
2. **Банк М. У.** Электрические и акустические параметры радиоприемных устройств. М., «Связь», 1974.
3. **Банк М. У., Рубичев Н. А.** Об интегральном методе контроля качества радиовещательных приемников. — «Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРПА», 1971, вып. 1.
4. **Белкин Б. Г., Борк А. А.** Соотношение между коэффициентами нелинейных искажений, измеренными на шумовом и синусоидальном сигналах. — «Техника кино и телевидения», 1968, № 7.
5. **Бобнев М. П.** Генерирование случайных сигналов. М., «Энергия», 1971.
6. **Бородич С. В.** Искажения и помехи в многоканальных системах радиосвязи с частотной модуляцией. М., «Связь», 1976.
7. **Бренерман Ю. Б., Розенберг В. Я., Рубичев Н. А.** Новый критерий оценки искажений при прохождении сигнала через нелинейные безынерционные системы. — «Труды метролог. ин-тов СССР», 1967. Вып. 94(154).
8. **Вакман Д. Е.** Искажение сигналов в линии задержки. — «Радиотехника и электроника», 1960, т. 5, № 4.
9. **Вольф В. М.** Динамический метод исследования нелинейных искажений. — «Радиотехника», 1953, № 2.
10. **Гончаров В. Л.** Теория интерполирования и приближения функций. М., ГИТТЛ, 1954.
11. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1963.
12. **Гуткин Л. С.** Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М., «Сов. радио», 1972.
13. **Гутников В. С.** Применение операционных усилителей в измерительной технике. Л., «Энергия», 1975.
14. **Давидов Е. Б.** Оценки допусков на отклонение частотной характеристики фазы, времени задержки и затухания в каналах связи при передаче импульсных сигналов. — «Электросвязь», 1966, № 2.
15. **Девис Г. Л.** Применение точной магнитной записи. М.—Л., «Энергия», 1967.
16. **Деч Р.** Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1965.
17. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., «Наука», 1974.
18. **Добровольский Г. В.** Передача импульсных сигналов по каналам связи. М., Связьиздат, 1960.
19. **Драпий В. А.** Искажения сигналов в импульсных усилителях на ЛБВ при нестабильности электропитания. — «Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника», 1976, т. 19, № 7.
20. **Еремин А. С., Розов В. С.** О нелинейности импульсных устройств. — «Электросвязь», 1963, № 8.

21. **Жовинский В. Н.** Генерирование шумов для исследования автоматических систем. М., «Энергия», 1968.
22. **Жовинский В. Н.** Схемы запоминания напряжения и блоки запаздывания. М., Госэнергоиздат, 1963.
23. **Журавлев В. М.** Методы измерения нелинейных искажений с помощью полос шума. — «Техника кино и телевидения», 1963, № 2.
24. **Журавлев В. М.** О применимости корреляционного метода оценки нелинейных искажений. — «Труды ЛИКИ», 1964, вып. 10.
25. **Иванов И. Ф., Трофимов В. С.** О едином методе измерения нелинейности импульсных устройств. — «Радиотехника», 1963, № 2.
26. **Казаков И. Е.** Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных автоматических систем.—«Автоматика и телемеханика», 1956, № 5.
27. **Кантор Л. Я.** Прибор для измерения нелинейных искажений. — «Вестник связи», 1957, № 12.
28. **Карелич Г. И.** О связи между критериями нелинейности. — «Радиотехника», 1969, т. 24, № 11.
29. **Коган Б. Я.** Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1962.
30. **Козлов О. М.** К вопросу о тождественности систем, оптимальных по различным критериям. — «Автоматика и телемеханика», 1963, № 11.
31. **Кондратьев С. Л., Карпин Ю. В.** О корреляционной оценке качества канала связи. — «Радиотехника», 1972, т. 27, № 3.
32. **Корн Г., Корн Т.** Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. В 2-х ч. Пер. с англ. М., «Мир», 1967, 1968.
33. **Красильников Н. Н.** О критерии оценки верности воспроизведения при исследовании помехозащищенности телевизионных систем. — «Радиотехника», 1966, т. 20, № 1.
34. **Кривошеев М. И.** Основы телевизионных измерений. М., «Связь», 1964.
35. **Лебедева А. М.** Статистический метод оценки искажений случайных сигналов в линейных инерционных и нелинейных безынерционных системах. — «Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРПА», 1972, вып. 2.
36. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. В 2-х кн., кн. 1-я, М., «Сов. радио», 1966.
37. **Левин Г. А., Левин Б. Р.** О полосе пропускания линейной системы и неискаженном воспроизведении. — «Радиотехника», 1954, т. 9, № 2.
38. **Левин Г. А., Левин Б. Р.** Временные характеристики импульсных сигналов, прошедших через линейную систему. — «Радиотехника», 1955, т. 10, № 1.
39. **Лившиц Н. А., Пугачев В. Н.** Вероятностный анализ систем автоматического управления. В 2-х ч. Ч. 1. М., «Сов. радио», 1963.
40. **Лурье О. Б.** Усилители видеочастоты. М., «Сов. радио», 1961.
41. **Малахов А. И.** Флуктуации коэффициента усиления лампового усилителя. — «Радиотехника и электроника», 1957, т. 2, № 4.
42. **Мигдилин И. Н.** Корреляционный метод исследования переходных процессов в линейных системах. — «Автоматика и телемеханика», 1963, т. 24, № 10.
43. **Миддлтон Д.** Введение в статистическую теорию связи. В 2-х т. Пер. с англ. М., «Сов. радио», 1961, 1962.

44. **Минухин В. Б.** Об искажениях сигналов в каналах магнитной записи при колебаниях скорости носителя. — «Радиотехника», 1971, т. 26, № 9.
45. **Мирский Г. Я.** Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М., «Энергия», 1972.
46. **Момот Е. Г.** Искажения, вызванные пульсацией напряжения, питающего приемник (вторичная модуляция). — «Научно-технический сборник ЛЭИС», 1935, вып. 7.
47. **Пенков Г.** Об измерении нелинейных искажений. — «Радио и телевидение», 1972, № 2 (ОИРТ).
48. **Пустынский И. Н.** Транзисторные видеоусилители. М., «Сов. радио», 1973.
49. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., ГИФМЛ, 1962.
50. **Рабинович Б. Е.** Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений. — «Труды ВНИИМ». 1962, Вып. 57/117.
51. **Реутова К. К.** К оценке влияния искажений фазоманипулированного сигнала на их корреляционные свойства, характеристики. — «Радиотехника», 1976, т. 31, № 2.
52. **Ризкин А. А.** Основы теории и расчета электронных усилителей. М., «Энергия», 1965.
53. **Розенберг В. Я.** Радиотехнические методы измерения параметров процессов и систем. М., Комитет стандартов, 1970.
54. **Розенберг В. Я.** Введение в теорию точности измерительных систем. М., «Сов. радио», 1975.
55. **Ромбо В. С., Фарбер Ю. Д.** Измерение характеристик многоканальных систем связи. М., «Связь», 1977.
56. **Рубичев Н. А.** Об измерении искажений случайного сигнала с помощью тестового сигнала. — В кн.: Сборник докладов I Всесоюз. симпозиума. Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей. Т. 2. Новосибирск, 1968.
57. **Рубичев Н. А.** Единый метод оценки искажений сигнала. — «Измер. техника», 1970, № 1.
58. **Рубичев Н. А.** Об обобщенном методе оценки искажений сигнала. — «Труды метролог. ин-тов СССР», 1973, вып. 108.
59. **Рубичев Н. А.** Методы оценки искажений сигнала (обзор). Там же.
60. **Рубичев Н. А.** О критерии оценки качества отдельного устройства, входящего в сложную систему. Там же.
61. **Рубичев Н. А.** Измерение нелинейных искажений с помощью полос шума. — «Измер. техника», 1971, № 5.
62. **Рубичев Н. А.** О формировании узкополосного сигнала с распределением, отличным от нормального. — «Радиотехника», 1971, т. 26, № 12.
63. **Рубичев Н. А.** О применении случайных отсчетов для определения среднего по времени значения сигнала. — «Автоматика и телемеханика», 1968, т. 29, № 2.
64. **Рубичев Н. А.** Измеритель суммарных искажений стационарных и периодических сигналов. — «Измер. техника», 1973, № 9.
65. **Рубичев Н. А.** Об оценке нелинейных искажений несинусоидального сигнала по результатам измерений с помощью ИНИ. — «Труды ВНИИФТРИ», 1974, вып. 17(47).
66. **Рубичев Н. А.** Схема фиксирования уровня сигнала. — ПТЭ, 1970, № 6.

67. **Рубичев Н. А.** Применение метода нескольких ординат для расчета нелинейных искажений случайного сигнала. — «Радиотехника», 1971, т. 26, № 2.
68. **Рубичев Н. А.** Расчет искажений формы сигнала из-за нестабильности скорости записи и воспроизведения. — «Измер. техника», 1977, № 6.
69. **Рытов С. М.** Связь распределения квазимонохроматического стационарного процесса с распределением его огибающей.—«ЖТФ», 1955, № 5 (11).
70. **Сапожков М. А.** Корреляционный метод измерения коэффициента искажений передачи. — «Акуст. журн.», 1956, № 3.
71. **Свириденко С. С.** Об искажении псевдослучайного сигнала с ограниченным спектром на выходе *RC*-фильтра. — «Радиотехника», 1969, т. 24, № 8.
72. **Сешу С., Балабян Н.** Анализ линейных цепей. М., Госэнергиздат, 1963.
73. **Смирнов Н. И., Судовцев В. А., Голубков А. А.** Анализ искажений сложных сигналов в цепях радиотехнических систем. — «Радиотехника», 1972, т. 27, № 12.
74. **Соловьев Н. Н.** Основы измерительной техники проводной связи. в 4-х ч., ч. 3, М., «Энергия», 1972.
75. **Степанов Б. М., Филиппов В. Н.** Об оценке искажений при магнитной записи с ШИМ. — «Измер. техника», 1966, № 7.
76. **Суходеев И. В.** Шумы электрических цепей (Теория). М., «Связь», 1975.
77. **Теумин И. И.** Методы экспериментального исследования переходных процессов в электрических цепях. М., «Сов. радио», 1956.
78. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М., «Сов. радио», 1966.
79. **Харкевич А. А.** О применении критерия среднеквадратичной погрешности к оценке линейных систем. — «ЖТФ», 1937, № 5.
80. **Цветков Э. И.** Нестационарные случайные процессы. М., «Энергия», 1973.
81. **Blair J. J.** The characterisation and measurement of nonlinearilies in transient measuring systems. — «IEEE Trans.», 1972, v. IM-21, № 4.
82. **Bohme R.** Eine Bedingung für vergeschreiben kleine Signalverzerrungen in linearen zeitungabhändigen Systemen. — «Nachrichten. Z.», 1967, Bd. 20, № 3.
83. **Cohen Stanley A.** Method of assingning the bandwidth to a channel. — «IEEE Trans.», 1967, v. EC-9, № 2.
84. **Darre A.** Methoden zur Messung nichtlineare Verzerrungen in Tonfrequenzgebiet. — «Frequenz», 1965, № 3, 4.
85. **Delorenzo J., Deangebnis D.** Real-Time measurement and correction of phase distortion in highfidelity radars. — «IEEE Intern. Conv. Rec.», 1963, v. 11, № 3.
86. **Filgenbaun W.** Ein Beitrag zur Berechnung von Hüllkurverzerrungen. — «Nachrichtentechnik», 1972, Bd. 22, № 3.
87. **Fritzsche G.** Zussammenhänge zwischen theoretischen und gemessen deterministischen Systemzeitfunktion. — «Nachrichtechnik», 1971, Bd. 21, № 5.
88. **Gensel Joachim.** Beitrage zur Theorie der Impulsverzerrungen in Schmalbandsystemen. Berlin. Akad. Verb., 1959.
89. **Gomlich H.** Mess-Signale in der Nachrichten-übertragungtechnik.— «Radio Mentor Electronic», 1971, № 7—10.

90. **Gorog E.** A new approath to time-domain equalisation. — «IBM J. Res. Dev.», 1965, № 4.
91. **Hartmann H. L.** Verzerrungen pulscodemoduliertesignals bei der Übertragung über eine Hohlkabelversuchsstrecke aus dielektrische beschichteten Aluminiumrohren. — «Frequenz», 1967, № 3.
92. **Humpheris D. S.** A figure of merit for frequency selective filtres. — «IEEE Trans.», 1963, v. CT-10, № 3.
93. **Johnson D. A. H.** Cross-correlation techniques and their application to communication channel evaluation. — «Radio and Electronics Engn.», 1969, v. 37, № 5.
94. **Jordan Gang B.** Band width and distortion in pulse filters. — «Electron. Engn.», 1966, v. 25, № 11.
95. **Kramer S. J.** A sensitive method for meassurement of amplitude—linearity. — «Proc. IRE», 1965, № 8.
96. **Loo S. G.** Spectral density of random signals corrupted by multiplicative noise. — «Electronics Letts», 1967, № 8.
97. **Naumann H. D.** Die gebrächlichsten Rauschangaben. — «Radio und Fernsehen», 1966, № 13.
98. **Redlich H. J.** Betrachtungen zum Linearitatsfehler von Messgeräten. — «Elecktronik», 1972, № 2.
99. **Roland W. Koch.** Random signal method of nonlinear amplitude Distortion measurement. — «IEEE Trans.», 1971, v. IM-20, № 2.
100. **Schreiber H.** Erzeugung komplixer Sygnale zur Verstärkerprufung. — «Funk-techn.», 1968, № 12.
101. **Seidel H.** Gerät zur Messung von nichtlinearen Verzerrungen in TF Anlagen während des Betriebs. — «Fernmeldtechnik», 1970, Bd. 10, № 5.
102. **Shepertycki T. M.** Telemetry error measurementes using psevdo random signals. — «IEEE Trans.», 1964, v. SET-10, sept.
103. **Simpson R. S., Hauts T. S.** A definition of a verge time delay for a linear sistem. — «Proc. IEEE», 1967, v. 55, № 10.
104. **Waddington D. E. O'N.** Synchronous tuned methode of harmonik and intermodulation distortion analysis. — «Radio and Electronics Engn.», 1965, № 5.
105. **Warren W. J., Hewelett W. R.** An analisis if the intermodulation method of distortion measurement. — «Proc. IRE», 1949, April.

Оглавление

Предисловие 3

Введение 4

Глава 1. **Общий подход к определению искажений передаваемого сигнала** 11

1.1. Разделение преобразованного сигнала на полезный сигнал и продукты искажений 11
1.2. Критерии различия сигналов 15
1.3. Определение параметров исследуемой системы . . 20
1.4. Связь рассматриваемого метода оценки искажений с другими методами 23

Глава 2. **Измерение искажений сигнала** 30

2.1. Общая структурная схема измерения суммарных искажений 30
2.2. К анализу погрешности измерения искажений . . 33
2.3. Измерение суммарных искажений в видеотрактах и им подобных 37
2.4. Измерение суммарных искажений в электроакустических трактах и им подобных 43
2.5. Об измерении отдельных видов искажений с помощью тестовых сигналов 54

Глава 3. **Нелинейные искажения** 57

3.1. Расчет нелинейных искажений по среднеквадратичному критерию 58
3.2. Расчет нелинейных искажений по методу нескольких ординат 61
3.3. Оценка нелинейных искажений реального сигнала по результатам измерения коэффициента гармоник . . 65
3.4. Измерение нелинейных искажений с помощью полос шума 72
3.5. Расчет нелинейных искажений по другим критериям 75
3.6. Тестовый сигнал для измерения нелинейных искажений в широкополосных системах 89
3.7. Тестовый сигнал для измерения нелинейных искажений в системах с ограниченной полосой пропускания 93

Глава 4. **Шумовые искажения** 106

4.1. Расчет искажений, вызванных аддитивным шумом . 106
4.2. Расчет искажений, вызванных мультипликативным шумом 111
4.3. Об измерении шумовых искажений 115

Глава 5. **Линейные искажения** 116
5.1. Расчет линейных искажений по среднеквадратичному критерию 117
5.2. Расчет частотных и фазовых искажений 126
5.3. О возможности применения других критериев для расчета линейных искажений 130
5.4. Измерение линейных искажений с помощью тестового сигнала 133

Глава 6. **Комбинированные искажения** 138
6.1. Искажения сигнала при восстановлении его по дискретным отсчетам 139
6.2. Искажения сигнала из-за нестабильности скорости записи и воспроизведения 142
6.3. Линейная система с флуктуирующими параметрами 151
6.4. Искажения сигнала в типовом радиотехническом звене 154

Список литературы 162

ИБ № 255

НИКОЛАЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ РУБИЧЕВ

Оценка и измерение искажений радиосигналов

Редактор *И. И. Рюжина*
Художественный редактор *А. Н. Алтунин*
Обложка художника *В. В. Кухты*
Технический редактор *И. В. Орлова*
Корректор *И. Г. Багрова*

Сдано в набор 03.11.77. Подписано к печати 27.01.78. Т-03537
Формат 84×108/32 Бумага типографская № 1. Литературная гарн. Высокая печать
Объем 8,82 усл. п. л. 8,7 уч.-изд. л.
Тираж 10 400 экз. Зак. 363 Цена 45 коп.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
при Государственном Комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

45 к.

Н. А. Рубичев ОЦЕНКА И ИЗМЕРЕНИЕ ИСКАЖЕНИЙ РАДИОСИГНАЛОВ